

Plaquette 1 - Calculer des longueurs, prouver un parallélisme

Théorème de Thalès — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème et méthodes du cours.

- **Théorème de Thalès.** Si A, M, B sont alignés, A, N, C sont alignés, et si (MN) et (BC) sont **parallèles**, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

- Les deux configurations : le « triangle » (les points M et N entre A et les sommets) et le « papillon » (les droites se croisent en A , les points de part et d'autre). Les rapports s'écrivent de la même façon.
- **Comment écrire les rapports** : au numérateur les longueurs du petit triangle, au dénominateur celles du grand, **dans le même ordre** (sommets communs d'abord).
- Calcul d'une longueur : on isole l'inconnue par un **produit en croix** : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ donne $a \times d = b \times c$.
- **Réciproque du théorème de Thalès.** Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points M, N sont placés **dans le même ordre** que B, C à partir de A , alors $(MN) \parallel (BC)$.
- Pour montrer que deux droites **ne sont pas** parallèles, il suffit de montrer que les deux rapports sont différents.

Correction de l'exercice 1 - Écrire les rapports

On part du sommet commun A et on respecte l'ordre : petit triangle AMN , grand triangle ABC .

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

- Le premier rapport compare les côtés portés par la même droite (AB) ;
- le deuxième, ceux portés par (AC) ;
- le troisième, les deux côtés parallèles.

Piège. On n'écrit pas $\frac{AM}{MB}$: le théorème compare le petit **côté entier** AM au grand côté AB , et non les deux morceaux entre eux.

Réponse. $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Correction de l'exercice 2 - Calculer une longueur (configuration triangle)

Les hypothèses du théorème de Thalès sont réunies, donc

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{3}{7,5} = \frac{4}{AC}$$

- Produit en croix : $3 \times AC = 7,5 \times 4 = 30$.
- Donc $AC = \frac{30}{3} = 10$ cm.
- Contrôle : le rapport de réduction vaut $\frac{3}{7,5} = 0,4$, et $0,4 \times 10 = 4 = AN$. Cohérent.

Réponse. $AC = 10$ cm.

Correction de l'exercice 3 - Calculer la longueur du segment parallèle

On utilise le rapport qui contient MN :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \implies \frac{MN}{9} = \frac{4}{6}$$

- Produit en croix : $6 \times MN = 9 \times 4 = 36$, donc $MN = \frac{36}{6} = 6$ cm.
- Contrôle : $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Les deux rapports sont bien égaux.

Réponse. $MN = 6$ cm.

Correction de l'exercice 4 - Configuration papillon

C'est la configuration « papillon » : le sommet commun est O , les triangles OAB et OCD ont des côtés parallèles. Thalès donne

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$$

- Rapport connu : $\frac{OA}{OC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- Calcul de OD : $\frac{4}{OD} = \frac{1}{2}$, donc $OD = 8$ cm.
- Calcul de CD : $\frac{5}{CD} = \frac{1}{2}$, donc $CD = 10$ cm.
- Interprétation : le triangle OCD est un agrandissement de OAB de rapport 2.

Réponse. $OD = 8$ cm et $CD = 10$ cm.

Correction de l'exercice 5 - Réciproque : prouver un parallélisme

On compare les deux rapports, comme l'exige la réciproque du théorème de Thalès.

- $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5} = 0,4$.
- $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{7,5} = 0,4$.
- Les deux rapports sont **égaux**, et les points M et N sont placés dans le même ordre que B et C à partir de A (sur les segments).
- D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

Réponse. Oui : les rapports valent tous les deux 0,4, donc $(MN) \parallel (BC)$.

Correction de l'exercice 6 - Réciproque : montrer que ce n'est pas parallèle

On calcule les deux rapports.

- $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{8} = 0,375$.
- $\frac{AN}{AC} = \frac{4}{10} = 0,4$.
- $0,375 \neq 0,4$: les rapports sont différents.
- Si les droites étaient parallèles, le théorème de Thalès imposerait l'égalité. Ce n'est pas le cas, donc (MN) et (BC) **ne sont pas** parallèles.

Méthode. Pour prouver un non-parallélisme, on raisonne par l'absurde avec le théorème **direct**, pas avec la réciproque.

Réponse. Non : $0,375 \neq 0,4$.

Correction de l'exercice 7 - Longueur intermédiaire

- Attention, on connaît MB et non AB : on commence par calculer $AB = AM + MB = 5 + 3 = 8$ cm.
- Thalès donne $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, soit $\frac{5}{8} = \frac{6,5}{AC}$.
- Produit en croix : $5 \times AC = 8 \times 6,5 = 52$, donc $AC = \frac{52}{5} = 10,4$ cm.
- Enfin $NC = AC - AN = 10,4 - 6,5 = 3,9$ cm.
- Contrôle : $\frac{AN}{AC} = \frac{6,5}{10,4} = 0,625 = \frac{5}{8}$. Cohérent.

Réponse. $AC = 10,4$ cm et $NC = 3,9$ cm.

Correction de l'exercice 8 - Problème : hauteur d'un arbre

Les rayons du soleil étant parallèles, les deux triangles (piquet-ombre et arbre-ombre) sont dans une configuration de Thalès : leurs côtés sont proportionnels.

$$\frac{\text{hauteur du piquet}}{\text{ombre du piquet}} = \frac{\text{hauteur de l'arbre}}{\text{ombre de l'arbre}}$$

- On remplace : $\frac{1,50}{2} = \frac{h}{14}$.
- Produit en croix : $2h = 1,50 \times 14 = 21$, donc $h = \frac{21}{2} = 10,5$ m.
- Contrôle : l'ombre de l'arbre est 7 fois celle du piquet, donc sa hauteur doit être 7 fois plus grande : $7 \times 1,5 = 10,5$ m. Cohérent.

Réponse. L'arbre mesure 10,5 m.

Correction de l'exercice 9 - Problème : largeur d'une rivière

Nous sommes dans une configuration de Thalès de sommet O , avec $(CD) \parallel (AB)$:

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}$$

- On remplace : $\frac{12}{30} = \frac{8}{AB}$.
- Produit en croix : $12 \times AB = 30 \times 8 = 240$, donc $AB = \frac{240}{12} = 20$ m.
- Contrôle : le rapport d'agrandissement est $\frac{30}{12} = 2,5$, et $8 \times 2,5 = 20$ m. Cohérent.
- **Conclusion : la rivière mesure 20 m de large.**

Réponse. $AB = 20$ m.

Correction de l'exercice 10 - Agrandissement et rapport

- a) Thalès donne $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$, donc

$$MN = \frac{2}{3} \times 12 = 8 \text{ cm}$$

- b) Toutes les longueurs de AMN valent les $\frac{2}{3}$ de celles de ABC : c'est une **réduction** de rapport $k = \frac{2}{3}$.

- c) Dans une réduction de rapport k , les aires sont multipliées par k^2 :

$$k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

— L'aire de AMN vaut donc les $\frac{4}{9}$ de celle de ABC , soit environ 44 %.

Réponse. a) $MN = 8$ cm · b) réduction de rapport $\frac{2}{3}$ · c) aire $\times \frac{4}{9}$.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : deux questions enchaînées

a) $\frac{AM}{AB} = \frac{4,5}{9} = 0,5$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{6}{12} = 0,5$.

— Les rapports sont égaux et les points sont dans le même ordre à partir de A : d'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

b) Le rapport de réduction vaut 0,5, donc $MN = 0,5 \times BC = 0,5 \times 15 = 7,5$ cm.

c) Dans une réduction de rapport $k = 0,5$, **toutes** les longueurs sont multipliées par 0,5, donc le périmètre aussi :

$$P(AMN) = 0,5 \times 36 = 18 \text{ cm}$$

— Contrôle : $AM + AN + MN = 4,5 + 6 + 7,5 = 18$ cm. Cohérent.

Réponse. a) rapports égaux à 0,5 · b) $MN = 7,5$ cm · c) périmètre 18 cm.