Plaquette 1 – Calculer des longueurs, prouver un parallélisme

Théorème de Thalès — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème et méthodes du cours.

— **Théorème de Thalès.** Si A, M, B sont alignés, A, N, C sont alignés, et si (MN) et (BC) sont **parallèles**, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

— Les deux configurations : le « triangle » (les points M et N entre A et les sommets) et le « papillon » (les droites se croisent en A, les points de part et d'autre). Les rapports s'écrivent de la même façon.

— **Comment écrire les rapports** : au numérateur les longueurs du petit triangle, au dénominateur celles du grand, **dans le même ordre** (sommet commun d'abord).

— Calcul d'une longueur : on isole l'inconnue par un **produit en croix** : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ donne $a \times d = b \times c$.

— **Réciproque du théorème de Thalès.** Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points M, N sont placés **dans le même ordre** que B, C à partir de A, alors $(MN) \parallel (BC)$.

— Pour montrer que deux droites **ne sont pas** parallèles, il suffit de montrer que les deux rapports sont différents.

Correction de l'exercice 1 – Écrire les rapports

On part du sommet commun A et on respecte l'ordre : petit triangle AMN, grand triangle ABC.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

— Le premier rapport compare les côtés portés par la même droite (AB) ;

— le deuxième, ceux portés par (AC) ;

— le troisième, les deux côtés parallèles.

Piège. On n'écrit pas $\frac{AM}{MB}$: le théorème compare le petit **côté entier** AM au grand côté AB, et non les deux morceaux entre eux.

Réponse. $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Correction de l'exercice 2 – Calculer une longueur (configuration triangle)

Les hypothèses du théorème de Thalès sont réunies, donc

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Longrightarrow \frac{3}{7{,}5} = \frac{4}{AC}$$

— Produit en croix : $3 \times AC = 7{,}5 \times 4 = 30$.

— Donc $AC = \frac{30}{3} = 10$ cm.

— Contrôle : le rapport de réduction vaut $\frac{3}{7{,}5} = 0{,}4$, et $0{,}4 \times 10 = 4 = AN$. Cohérent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $AC = 10$ cm.

Correction de l’exercice 3 – Calculer la longueur du segment parallèle

On utilise le rapport qui contient MN :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Longrightarrow \frac{MN}{9} = \frac{4}{6}$$

— Produit en croix : $6 \times MN = 9 \times 4 = 36$, donc $MN = \dfrac{36}{6} = 6$ cm.

— Contrôle : $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$. Les deux rapports sont bien égaux.

Réponse. $MN = 6$ cm.

Correction de l’exercice 4 – Configuration papillon

C’est la configuration « papillon » : le sommet commun est O, les triangles OAB et OCD ont des côtés parallèles. Thalès donne

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$$

— Rapport connu : $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

— Calcul de OD : $\dfrac{4}{OD} = \dfrac{1}{2}$, donc $OD = 8$ cm.

— Calcul de CD : $\dfrac{5}{CD} = \dfrac{1}{2}$, donc $CD = 10$ cm.

— Interprétation : le triangle OCD est un agrandissement de OAB de rapport 2.

Réponse. $OD = 8$ cm et $CD = 10$ cm.

Correction de l’exercice 5 – Réciproque : prouver un parallélisme

On compare les deux rapports, comme l’exige la réciproque du théorème de Thalès.

— $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

— $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{3}{7{,}5} = 0{,}4$.

— Les deux rapports sont **égaux**, et les points M et N sont placés dans le même ordre que B et C à partir de A (sur les segments).

— D’après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

Réponse. Oui : les rapports valent tous les deux 0,4, donc $(MN) \parallel (BC)$.

Correction de l’exercice 6 – Réciproque : montrer que ce n’est pas parallèle

On calcule les deux rapports.

— $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$.

— $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$.

— $0{,}375 \neq 0{,}4$: les rapports sont différents.

— Si les droites étaient parallèles, le théorème de Thalès imposerait l’égalité. Ce n’est pas le cas, donc (MN) et (BC) **ne sont pas** parallèles.

Méthode. Pour prouver un non-parallélisme, on raisonne par l’absurde avec le théorème **direct**, pas avec la réciproque.

Réponse. Non : $0{,}375 \neq 0{,}4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 7 – Longueur intermédiaire

— Attention, on connaît MB et non AB : on commence par calculer $AB = AM + MB = 5 + 3 = 8$ cm.

— Thalès donne $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, soit $\frac{5}{8} = \frac{6{,}5}{AC}$.

— Produit en croix : $5 \times AC = 8 \times 6{,}5 = 52$, donc $AC = \frac{52}{5} = 10{,}4$ cm.

— Enfin $NC = AC - AN = 10{,}4 - 6{,}5 = 3{,}9$ cm.

— Contrôle : $\frac{AN}{AC} = \frac{6{,}5}{10{,}4} = 0{,}625 = \frac{5}{8}$. Cohérent.

Réponse. $AC = 10{,}4$ cm et $NC = 3{,}9$ cm.

Correction de l’exercice 8 – L’inconnue est AM

Les points A, M, B et A, N, C sont alignés et $(MN) \parallel (BC)$: d’après le théorème de Thalès,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{AM}{12} = \frac{5}{15}$$

Le second rapport se simplifie en $\frac{1}{3}$, donc $AM = \frac{1}{3} \times 12 = 4$ cm. Comme M est sur le segment $[AB]$, $MB = AB - AM = 12 - 4 = 8$ cm.

Contrôle : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, on retrouve bien le rapport $\frac{AN}{AC}$.

Réponse. $AM = 4$ cm et $MB = 8$ cm.

Correction de l’exercice 9 – Papillon : deux longueurs

C’est la configuration papillon : les droites se croisent en A et $(BC) \parallel (MN)$. Le théorème de Thalès s’applique comme en configuration triangle :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Le rapport connu vaut $\frac{AM}{AB} = \frac{10}{4} = 2{,}5$: le triangle AMN est un agrandissement de ABC. On en déduit $AN = 2{,}5 \times 5 = 12{,}5$ cm et $MN = 2{,}5 \times 6 = 15$ cm.

Contrôle : $\frac{12{,}5}{5} = 2{,}5$ et $\frac{15}{6} = 2{,}5$, les trois rapports sont égaux.

Réponse. $AN = 12{,}5$ cm et $MN = 15$ cm.

Correction de l’exercice 10 – Réciproque en configuration papillon

On compare les deux rapports de la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5 \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

Les rapports sont égaux. De plus, les points sont placés dans le même ordre : A est entre B et M comme entre C et N. D’après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont **parallèles**.

Contrôle sans décimaux, par les produits en croix : $7{,}5 \times 4 = 30$ et $3 \times 10 = 30$.

Réponse. Oui : les deux rapports valent 2,5, donc $(BC) \parallel (MN)$.

Correction de l’exercice 11 – Problème : la tablette d’une étagère

La tablette est parallèle au sol : $(MN) \parallel (BC)$, avec $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$. C’est une configuration triangle, et le théorème de Thalès donne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{60}{150} = 0{,}4$$

La tablette mesure donc $0{,}4 \times 90 = 36$ cm.

Contrôle de vraisemblance : la tablette est placée aux deux cinquièmes de la hauteur des montants en partant du haut, elle est donc nettement plus courte que l'écartement au sol (36 cm contre 90 cm).

Réponse. La tablette mesure 36 cm.

Correction de l'exercice 12 – Problème : hauteur d'un arbre

Les rayons du soleil étant parallèles, les deux triangles (piquet-ombre et arbre-ombre) sont dans une configuration de Thalès : leurs côtés sont proportionnels.

$$\frac{\text{hauteur du piquet}}{\text{ombre du piquet}} = \frac{\text{hauteur de l'arbre}}{\text{ombre de l'arbre}}$$

— On remplace : $\frac{1{,}50}{2} = \frac{h}{14}$.

— Produit en croix : $2h = 1{,}50 \times 14 = 21$, donc $h = \frac{21}{2} = 10{,}5$ m.

— Contrôle : l'ombre de l'arbre est 7 fois celle du piquet, donc sa hauteur doit être 7 fois plus grande : $7 \times 1{,}5 = 10{,}5$ m. Cohérent.

Réponse. L'arbre mesure 10,5 m.

Correction de l'exercice 13 – Problème : largeur d'une rivière

Nous sommes dans une configuration de Thalès de sommet O, avec $(CD) \parallel (AB)$:

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB}$$

— On remplace : $\frac{12}{30} = \frac{8}{AB}$.

— Produit en croix : $12 \times AB = 30 \times 8 = 240$, donc $AB = \frac{240}{12} = 20$ m.

— Contrôle : le rapport d'agrandissement est $\frac{30}{12} = 2{,}5$, et $8 \times 2{,}5 = 20$ m. Cohérent.

— **Conclusion : la rivière mesure** 20 **m de large.**

Réponse. $AB = 20$ m.

Correction de l'exercice 14 – Agrandissement et rapport

a) Thalès donne $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$, donc

$$MN = \frac{2}{3} \times 12 = 8 \text{ cm}$$

b) Toutes les longueurs de AMN valent les $\frac{2}{3}$ de celles de ABC : c'est une **réduction** de rapport $k = \frac{2}{3}$.

c) Dans une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2 :

— $k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

— L'aire de AMN vaut donc les $\frac{4}{9}$ de celle de ABC, soit environ 44 %.

Réponse. a) $MN = 8$ cm · b) réduction de rapport $\frac{2}{3}$ · c) aire $\times \frac{4}{9}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : deux questions enchaînées

a) $\frac{AM}{AB} = \frac{4{,}5}{9} = 0{,}5$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{6}{12} = 0{,}5$.

— Les rapports sont égaux et les points sont dans le même ordre à partir de A : d’après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

b) Le rapport de réduction vaut 0,5, donc $MN = 0{,}5 \times BC = 0{,}5 \times 15 = 7{,}5$ cm.

c) Dans une réduction de rapport $k = 0{,}5$, **toutes** les longueurs sont multipliées par 0,5, donc le périmètre aussi :

$$P(AMN) = 0{,}5 \times 36 = 18 \text{ cm}$$

— Contrôle : $AM + AN + MN = 4{,}5 + 6 + 7{,}5 = 18$ cm. Cohérent.

Réponse. a) rapports égaux à 0,5 · b) $MN = 7{,}5$ cm · c) périmètre 18 cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).