

Plaquette 3 – Configuration papillon et agrandissements

Théorème de Thalès — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La configuration papillon. Les points B, A, M sont alignés dans cet ordre, les points C, A, N aussi, et $(BC) \parallel (MN)$. Alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Ce qui change et ce qui ne change pas.

Élément	Triangle	Papillon
point commun	le sommet A	le point d'intersection A
position de M et N	du même côté que B et C	de l' autre côté
écriture des rapports	identique	identique
relation $AB = AM + MB$	vraie	fausse

⚠ Dans la configuration papillon, A est **entre** B et M : on a $BM = AB + AM$, et non $AB = AM + MB$.

Reconnaître la configuration. On regarde où se trouve le point commun : à l'extrémité des deux segments (triangle) ou au milieu (papillon).

Rapport supérieur à 1. Rien n'oblige le petit triangle à être plus petit : si $AM > AB$, le triangle AMN est un **agrandissement** de ABC .

Valeur de k	Effet
$k < 1$	réduction
$k = 1$	même taille, figure symétrique
$k > 1$	agrandissement

Effets d'un rapport k .

$$\text{longueurs} \times k \quad \text{aires} \times k^2 \quad \text{volumes} \times k^3$$

Contrôle systématique. Le rapport calculé doit être le même avec les trois paires de longueurs. Une différence signale une erreur d'écriture ou un défaut de parallélisme.

Correction de l'exercice 1 – Première configuration papillon

- **Configuration** : papillon, A est le point d'intersection ✓
- **Parallélisme** : $(BC) \parallel (MN)$ ✓
- **Théorème de Thalès** : les rapports sont égaux ✓
- **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ✓
- **Substitution** : $\frac{9}{6} = \frac{AN}{8}$ ✓
- **Simplification du premier rapport** : $\frac{3}{2}$ ✓

- **Forme décimale** : 1,5 ✓
- **Produit en croix** : $2 \times AN = 3 \times 8$ ✓
- **Calcul** : $2 \times AN = 24$ ✓
- **Résultat** :

$$AN = 12 \text{ cm}$$

- **Contrôle** : $\frac{12}{8} = 1,5$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Interprétation** : $k = 1,5 > 1$, c'est un agrandissement ✓
- **Longueur BM** : $AB + AM$ ✓
- **Attention** : ici A est **entre** B et M ✓
- **Calcul** : $6 + 9$ ✓
- **Valeur** : 15 cm ✓
- **Longueur CN** : $8 + 12 = 20$ cm ✓
- **Contrôle** : $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ ✓

Réponse. $AN = 12$ cm.

Correction de l'exercice 2 - Calculer le segment parallèle

- **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ ✓
- **Substitution** : $\frac{15}{5} = \frac{MN}{4}$ ✓
- **Simplification du premier rapport** : 3 ✓
- **Produit en croix** : $MN = 3 \times 4$ ✓
- **Résultat** :

$$MN = 12 \text{ cm}$$

- **Contrôle** : $\frac{12}{4} = 3$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Rapport** : $k = 3$ ✓
- **Interprétation** : le triangle AMN est trois fois plus grand ✓
- **Rapport des aires** : $k^2 = 9$ ✓
- **Interprétation** : son aire est neuf fois plus grande ✓
- **Longueur BM** : $5 + 15$ ✓
- **Valeur** : 20 cm ✓
- **Rapport** $\frac{AM}{BM}$: $\frac{15}{20} = 0,75$ ✓
- **Remarque** : cette fraction n'est pas celle du théorème ✓
- **Si AM valait 5 cm** : $k = 1$ ✓
- **Conséquence** : $MN = BC = 4$ cm ✓
- **Interprétation** : A serait le milieu de [BM] ✓

Réponse. $MN = 12$ cm.

Correction de l'exercice 3 - L'inconnue au dénominateur

- **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ✓
- **Substitution** : $\frac{6}{10} = \frac{9}{AC}$ ✓

- **Simplification du premier rapport** : $\frac{3}{5} \checkmark$
- **Forme décimale** : 0,6 $\checkmark$
- **Produit en croix** : $3 \times AC = 5 \times 9 \checkmark$
- **Calcul** : $3 \times AC = 45 \checkmark$
- **Résultat** :

$$AC = 15 \text{ cm}$$

- **Contrôle** : $\frac{9}{15} = 0,6 \checkmark$
- **Concordance** $\checkmark$
- **Rapport** : $k = 0,6 < 1 \checkmark$
- **Interprétation** : AMN est une réduction de $ABC \checkmark$
- **Longueur BM** : $10 + 6 \checkmark$
- **Valeur** : 16 cm $\checkmark$
- **Longueur CN** : $15 + 9 \checkmark$
- **Valeur** : 24 cm $\checkmark$
- **Contrôle** : $\frac{16}{24} = \frac{2}{3} \checkmark$
- **Et** : $\frac{AB}{AC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \checkmark$
- **Concordance** $\checkmark$

Réponse. $AC = 15 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 4 - Trois longueurs à trouver

- a) **Rapport** : $\frac{AM}{AB} \checkmark$

- **Calcul** : $\frac{4}{10} \checkmark$

- **Simplification** :

$$k = 0,4$$

- **Interprétation** : AMN est une réduction de $ABC \checkmark$

- b) **Égalité utile** : $\frac{AN}{AC} = 0,4 \checkmark$

- **Équation** : $\frac{6}{AC} = 0,4 \checkmark$

- **Produit en croix** : $0,4 \times AC = 6 \checkmark$

- **Résultat** :

$$AC = 15 \text{ cm}$$

- **Égalité pour BC** : $\frac{MN}{BC} = 0,4 \checkmark$

- **Équation** : $\frac{5}{BC} = 0,4 \checkmark$

- **Produit en croix** : $0,4 \times BC = 5 \checkmark$

- **Résultat** :

$$BC = 12,5 \text{ cm}$$

- **Contrôle des trois rapports** : $\frac{4}{10} = 0,4 \checkmark$

- **Et** : $\frac{6}{15} = 0,4 \checkmark$

- **Et** : $\frac{5}{12,5} = 0,4 \checkmark$

- **Les trois concordent** ✓
- **Périmètre de AMN** : $4 + 6 + 5 = 15$ cm ✓
- **Périmètre de ABC** : $10 + 15 + 12,5 = 37,5$ cm ✓
- **Rapport des périmètres** : $\frac{15}{37,5} = 0,4$ ✓

Réponse. a) $k = 0,4$ · b) $AC = 15$ cm et $BC = 12,5$ cm.

Correction de l'exercice 5 - Reconnaître la configuration

- **Critère** : où se trouve le point commun A ✓
- a) **Position de A** : à l'extrémité des deux segments ✓
- **Position de M et N** : entre A et les autres points ✓
- **Configuration** :

triangle

- **Relation valable** : $AB = AM + MB$ ✓
- **Rapport** : $k < 1$ ✓

b) **Position de A : entre B et M** ✓

- **Et** : entre C et N ✓
- **Configuration** :

papillon

- **Relation valable** : $BM = AB + AM$ ✓
- **Rapport** : il peut être inférieur ou supérieur à 1 ✓

c) **Position de A** : à l'extrémité ✓

- **Position de B** : entre A et M ✓
- **Configuration** :

triangle

- **Particularité** : cette fois $AM > AB$ ✓
- **Rapport** : $k > 1$, c'est un agrandissement ✓
- **Relation valable** : $AM = AB + BM$ ✓
- **Point commun aux trois cas** : l'écriture des rapports ✓
- **Ce qui change** : la façon de calculer les longueurs annexes ✓

Réponse. a) triangle · b) papillon · c) triangle (avec agrandissement).

Correction de l'exercice 6 - Un agrandissement

- a) **Relation** : $AM = AB + BM$ ✓
- **Justification** : B appartient au segment $[AM]$ ✓
- **Calcul** : $8 + 12$ ✓
- **Résultat** :

$$AM = 20 \text{ cm}$$

b) **Rapport** : $\frac{AM}{AB}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{20}{8}$ ✓

— **Simplification** :

$$k = 2,5$$

— **Interprétation** : AMN est un agrandissement de ABC ✓

— **Longueur MN** : $2,5 \times 6$ ✓

— **Résultat** :

$$MN = 15 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $\frac{15}{6} = 2,5$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : $MN > BC$ ✓

— **Rapport des aires** : $2,5^2 = 6,25$ ✓

— **Interprétation** : l'aire est multipliée par 6,25 ✓

— **Si l'aire de ABC vaut 16 cm^2** : celle de AMN vaut 100 cm^2 ✓

— **Contrôle** : $6,25 \times 16 = 100$ ✓

— **Rapport inverse** : $\frac{1}{2,5} = 0,4$ ✓

— **Interprétation** : ABC est une réduction de rapport 0,4 ✓

Réponse. a) $AM = 20 \text{ cm}$ · b) $k = 2,5$ et $MN = 15 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 7 - Avec des fractions

— **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ✓

— **Substitution** : $\frac{15/2}{5} = \frac{AN}{4}$ ✓

— **Simplification du premier rapport** : diviser par 5 revient à multiplier par $\frac{1}{5}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{15}{2} \times \frac{1}{5}$ ✓

— **Résultat** : $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ ✓

— **Forme décimale** : 1,5 ✓

— **Équation** : $\frac{AN}{4} = 1,5$ ✓

— **Résultat** :

$$AN = 6 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $\frac{6}{4} = 1,5$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Valeur décimale de AM** : 7,5 cm ✓

— **Contrôle** : $\frac{7,5}{5} = 1,5$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Longueur BM** : $5 + 7,5$ ✓

— **Valeur** : 12,5 cm ✓

— **Longueur CN** : $4 + 6 = 10 \text{ cm}$ ✓

— **Contrôle** : $\frac{10}{12,5} = 0,8$ ✓

— **Et** : $\frac{AC}{AB} = \frac{4}{5} = 0,8$ ✓

Réponse. $AN = 6 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 8 – Le viseur

- **Modélisation** : deux triangles de sommet commun A ✓
- **Parallélisme** : la mire et la tour sont verticales ✓
- **Configuration** : triangle, avec $k = \frac{40}{2}$ ✓
- **Rapport** : 20 ✓
- **Interprétation** : la tour est vue 20 fois plus loin ✓
- **Hauteur de la mire en mètres** : 0,3 m ✓
- **Hauteur de la tour** : $20 \times 0,3$ ✓
- **Résultat** :

6 m
- **Contrôle par produit en croix** : $\frac{0,3}{2} = \frac{h}{40}$ ✓
- **Calcul** : $2h = 12$ ✓
- **Résultat** : $h = 6$ m ✓
- **Concordance** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : 6 m pour une petite tour ✓
- **Si la mire était à 1 m** : rapport 40 ✓
- **Hauteur visée** : 12 m ✓
- **Interprétation** : rapprocher la mire double la hauteur mesurée ✓
- **Condition de validité** : l'œil, le haut de la mire et le sommet alignés ✓
- **Précision** : une erreur de 1 cm sur la mire donne 20 cm sur la tour ✓

Réponse. La tour mesure 6 m.

Correction de l'exercice 9 – Une distance inaccessible

- **Configuration** : papillon ✓
- **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ ✓
- **Substitution** : $\frac{8}{24} = \frac{5}{BC}$ ✓
- **Simplification du premier rapport** : $\frac{1}{3}$ ✓
- **Produit en croix** : $BC = 3 \times 5$ ✓
- **Résultat** :

$BC = 15$ m
- **Contrôle** : $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : $BC > MN$, cohérent avec $k < 1$ ✓
- **Intérêt de la méthode** : on n'a mesuré que du côté accessible ✓
- **Mesures effectuées** : AB , AM et MN ✓
- **Longueur BM** : $24 + 8$ ✓
- **Valeur** : 32 m ✓
- **Piège** : utiliser 32 au lieu de 24 ✓
- **Ce que cela donnerait** : $BC = 20$ m ✓
- **Erreur** : 5 m de trop ✓
- **Règle** : le rapport compare AM à AB , pas à BM ✓

Réponse. $BC = 15$ m.

Correction de l'exercice 10 - Deux configurations enchaînées

a) **Rapport** : $\frac{AP}{AM}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{3}{4}$ ✓

— **Résultat** :

$$0,75$$

b) **Premier rapport** : $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ✓

— **Composition des deux réductions** : on multiplie les rapports ✓

— **Calcul** : $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ ✓

— **Résultat** :

$$\frac{1}{4}$$

— **Contrôle direct** : $\frac{AP}{AB} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ ✓

— **Concordance** ✓

c) **Longueur MN** : $\frac{1}{3} \times 18$ ✓

— **Résultat** : 6 cm ✓

— **Longueur PQ** : $\frac{3}{4} \times 6$ ✓

— **Résultat** :

$$PQ = 4,5 \text{ cm}$$

— **Contrôle direct** : $\frac{1}{4} \times 18 = 4,5 \text{ cm}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Vérification du parallélisme de (PQ) et (BC)** ✓

— **Argument** : deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles ✓

— **Contrôle de l'ordre** : $PQ < MN < BC$ ✓

— **Rapport des aires entre APQ et ABC** : $\frac{1}{16}$ ✓

— **Interprétation** : une toute petite part du triangle ✓

Réponse. a) $0,75$ · b) $\frac{1}{4}$ · c) $MN = 6 \text{ cm}$ et $PQ = 4,5 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 11 - Comparer les deux configurations

a) **Égalité** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ✓

— **Substitution** : $\frac{6}{4} = \frac{AN}{10}$ ✓

— **Simplification** : $1,5$ ✓

— **Résultat** :

$$AN = 15$$

— **Remarque** : $AM > AB$, donc $k > 1$ ✓

— **Position de B** : entre A et M ✓

b) **Égalité** : identique ✓

— **Substitution** : $\frac{6}{4} = \frac{AN}{10}$ ✓

— **Résultat** :

$$AN = 15$$

— **Constat** : le résultat est **le même** ✓

— **Explication** : les rapports s'écrivent de façon identique ✓

— **Ce qui diffère** : la position des points sur la figure ✓

— **En configuration triangle** : $BM = AM - AB = 2$ ✓

— **En configuration papillon** : $BM = AM + AB = 10$ ✓

— **Là est la vraie différence** ✓

— **Longueur CN en triangle** : $15 - 10 = 5$ ✓

— **Longueur CN en papillon** : $15 + 10 = 25$ ✓

— **Contrôle du rapport en triangle** : $\frac{2}{5} = 0,4$ ✓

— **Contrôle en papillon** : $\frac{10}{25} = 0,4$ ✓

— **Conclusion** : le théorème est le même, les longueurs annexes diffèrent ✓

Réponse. $AN = 15$ dans les deux cas ; seules les longueurs BM et CN diffèrent.

Correction de l'exercice 12 - Périmètres et rapport

a) **Rapport** : $\frac{AM}{AB}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{10}{4}$ ✓

— **Simplification** :

$$k = 2,5$$

— **Interprétation** : agrandissement ✓

b) **Règle** : les périmètres sont multipliés par k ✓

— **Calcul** : $2,5 \times 28$ ✓

— **Résultat** :

$$70 \text{ cm}$$

c) **Règle** : les aires sont multipliées par k^2 ✓

— **Calcul de k^2** : $2,5^2$ ✓

— **Valeur** : $6,25$ ✓

— **Aire de AMN** : $6,25 \times 24$ ✓

— **Résultat** :

$$150 \text{ cm}^2$$

— **Piège** : multiplier l'aire par $2,5$ ✓

— **Ce que cela donnerait** : 60 cm^2 , bien trop peu ✓

— **Contrôle de cohérence** : le rapport des aires vaut $\frac{150}{24}$ ✓

— **Calcul** : $6,25$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Rapport des périmètres** : $\frac{70}{28} = 2,5$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Règle à retenir** : périmètres en k , aires en k^2 ✓

— **Pour les volumes d'un solide** : en k^3 ✓

— **Contrôle** : $2,5^3 = 15,625$ ✓

Réponse. a) $k = 2,5$ · b) 70 cm · c) 150 cm^2 .

Correction de l'exercice 13 - Repérer une incohérence

— **Premier rapport** : $\frac{AM}{AB} = \frac{6}{9}$ ✓

— **Simplification** : $\frac{2}{3}$ ✓

— **Valeur approchée** : $\approx 0,667$ ✓

— **Second rapport** : $\frac{AN}{AC} = \frac{8}{10}$ ✓

— **Simplification** : $\frac{4}{5}$ ✓

— **Valeur décimale** : $0,8$ ✓

— **Comparaison** : $0,667 \neq 0,8$ ✓

— **Conclusion** :

l'énoncé est incohérent

— **Justification** : le théorème impose l'égalité des rapports ✓

— **Ce qui est donc faux** : soit une longueur, soit le parallélisme ✓

— **Valeur de AC rendant l'énoncé cohérent** : $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$ ✓

— **Équation** : $\frac{8}{AC} = \frac{2}{3}$ ✓

— **Résultat** : $AC = 12$ ✓

— **Valeur de AN rendant l'énoncé cohérent** : $\frac{2}{3} \times 10$ ✓

— **Résultat** : $AN \approx 6,67$ ✓

— **Troisième possibilité** : les droites ne sont pas parallèles ✓

— **Ce que dirait alors la réciproque** : rapports différents, donc non parallèles ✓

— **Leçon** : vérifier la cohérence avant de calculer ✓

Réponse. Non : $\frac{6}{9} \neq \frac{8}{10}$, les rapports devraient être égaux.

Correction de l'exercice 14 - Le pantographe

a) **Rapport** : $\frac{45}{15}$ ✓

— **Résultat** :

$$k = 3$$

b) **Longueur agrandie** : $3 \times 2,4$ ✓

— **Résultat** :

$$7,2 \text{ cm}$$

c) **Rapport des aires** : k^2 ✓

— **Calcul** : $3^2 = 9$ ✓

— **Aire agrandie** : 9×4 ✓

— **Résultat** :

$$36 \text{ cm}^2$$

— **Contrôle** : un carré de 4 cm^2 a un côté de 2 cm ✓

- **Côté agrandi** : 6 cm ✓
- **Aire** : 36 cm² ✓
- **Concordance** ✓
- **Piège** : multiplier l'aire par 3 ✓
- **Ce que cela donnerait** : 12 cm², trois fois trop peu ✓
- **Pour revenir au dessin initial** : rapport $\frac{1}{3}$ ✓
- **Contrôle** : $7,2 \times \frac{1}{3} = 2,4$ cm ✓
- **Réglage pour doubler seulement** : $AM = 30$ cm ✓
- **Contrôle** : $\frac{30}{15} = 2$ ✓
- **Aire alors multipliée par** : 4 ✓

Réponse. a) $k = 3$ · b) 7,2 cm · c) 36 cm².

Correction de l'exercice 15 - Une maquette

a) **Rapport des longueurs** : $\frac{1}{50}$ ✓

- **Calcul** : $\frac{12}{50}$ ✓
- **Résultat** : 0,24 m ✓
- **En centimètres** :

24 cm

b) **Rapport des aires** : $\left(\frac{1}{50}\right)^2$ ✓

- **Valeur** : $\frac{1}{2500}$ ✓
- **Calcul** : $\frac{200}{2500}$ ✓
- **Résultat** : 0,08 m² ✓
- **En centimètres carrés** :

800 cm²

- **Contrôle** : 1 m² vaut 10 000 cm² ✓
- **Calcul** : $0,08 \times 10\,000 = 800$ ✓
- **Concordance** ✓

c) **Rapport des volumes** : $\left(\frac{1}{50}\right)^3$ ✓

- **Valeur** : $\frac{1}{125\,000}$ ✓
- **Calcul** : $\frac{150}{125\,000}$ ✓
- **Résultat** : 0,0012 m³ ✓
- **En litres** :

1,2 L

- **Contrôle** : 1 m³ vaut 1000 L ✓
- **Calcul** : $0,0012 \times 1000 = 1,2$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Leçon** : longueurs en k , aires en k^2 , volumes en k^3 ✓

Réponse. a) 24 cm · b) 800 cm² · c) 1,2 L.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : papillon complet

a) **Rapport** : $\frac{AM}{AB} = \frac{15}{9} \checkmark$

— **Simplification** :

$$k = \frac{5}{3}$$

— **Valeur approchée** : $\approx 1,667 \checkmark$

— **Interprétation** : agrandissement $\checkmark$

b) **Longueur AN** : $\frac{5}{3} \times 12 \checkmark$

— **Résultat** : 20 cm $\checkmark$

— **Longueur MN** : $\frac{5}{3} \times 15 \checkmark$

— **Résultat** :

$$MN = 25 \text{ cm}$$

— **Contrôle des rapports** : $\frac{20}{12} = \frac{5}{3} \checkmark$

— **Et** : $\frac{25}{15} = \frac{5}{3} \checkmark$

— **Concordance** $\checkmark$

c) **Longueur BM** : $AB + AM \checkmark$

— **Justification** : A est entre B et M $\checkmark$

— **Calcul** : $9 + 15 \checkmark$

— **Résultat** : 24 cm $\checkmark$

— **Longueur CN** : $12 + 20 \checkmark$

— **Résultat** :

$$CN = 32 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $\frac{24}{32} = \frac{3}{4} \checkmark$

— **Et** : $\frac{AB}{AC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \checkmark$

— **Concordance** $\checkmark$

d) **Rapport des aires** : $k^2 \checkmark$

— **Calcul** : $\left(\frac{5}{3}\right)^2 \checkmark$

— **Résultat** :

$$\frac{25}{9} \approx 2,78$$

— **Interprétation** : l'aire de AMN vaut environ 2,78 fois celle de ABC $\checkmark$

— **Vérification par le triplet** : 9, 12, 15 $\checkmark$

— **Contrôle de Pythagore** : $81 + 144 = 225 \checkmark$

— **Conclusion** : ABC est rectangle en A $\checkmark$

— **Aire de ABC** : $\frac{9 \times 12}{2} = 54 \text{ cm}^2 \checkmark$

— **Aire de AMN** : $\frac{25}{9} \times 54 = 150 \text{ cm}^2 \checkmark$

Réponse. a) $k = \frac{5}{3}$ · b) $AN = 20 \text{ cm}$, $MN = 25 \text{ cm}$ · c) $BM = 24 \text{ cm}$, $CN = 32 \text{ cm}$ · d) le

rapport des aires vaut $\frac{25}{9}$.