Plaquette 3 – Configuration papillon et agrandissements

Théorème de Thalès — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La configuration papillon. Les points B, A, M sont alignés dans cet ordre, les points C, A, N aussi, et $(BC) \parallel (MN)$. Alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Ce qui change et ce qui ne change pas.

Élément	Triangle	Papillon
point commun	le sommet A	le point d'intersection A
position de M et N	du même côté que B et C	de l'**autre** côté
écriture des rapports	identique	identique
relation $AB = AM + MB$	vraie	**fausse**

⚠ Dans la configuration papillon, A est **entre** B et M : on a $BM = AB + AM$, et non $AB = AM + MB$.

Reconnaître la configuration. On regarde où se trouve le point commun : à l'extrémité des deux segments (triangle) ou au milieu (papillon).

Rapport supérieur à 1. Rien n'oblige le petit triangle à être plus petit : si $AM > AB$, le triangle AMN est un **agrandissement** de ABC.

Valeur de k	Effet
$k < 1$	réduction
$k = 1$	même taille, figure symétrique
$k > 1$	agrandissement

Effets d'un rapport k.

$$\text{longueurs} \times k \qquad \text{aires} \times k^2 \qquad \text{volumes} \times k^3$$

Contrôle systématique. Le rapport calculé doit être le même avec les trois paires de longueurs. Une différence signale une erreur d'écriture ou un défaut de parallélisme.

Correction de l'exercice 1 – Première configuration papillon

Les points B, A, M d'une part et C, A, N d'autre part sont alignés, avec A entre les autres : c'est la configuration papillon. Comme $(BC) \parallel (MN)$, le théorème de Thalès s'applique et

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \text{soit} \quad \frac{9}{6} = \frac{AN}{8}$$

Le premier rapport vaut $\frac{3}{2} = 1{,}5$: le triangle AMN est un agrandissement de ABC. Donc $AN = 1{,}5 \times 8 = 12$ cm.

Attention : ici A est entre B et M, donc $BM = AB + AM = 6 + 9 = 15$ cm (et non une

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

différence). De même $CN = 8 + 12 = 20$ cm.

Réponse. $AN = 12$ cm.

Correction de l’exercice 2 – Calculer le segment parallèle

Configuration papillon avec $(BC) \parallel (MN)$: d’après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit

$$\frac{15}{5} = \frac{MN}{4}$$

Le premier rapport vaut 3 : le triangle AMN est trois fois plus grand que ABC. Donc $MN = 3 \times 4 = 12$ cm.

Conséquence : les aires sont multipliées par $3^2 = 9$, l’aire de AMN est neuf fois celle de ABC. Si l’on avait $AM = 5$ cm, le rapport vaudrait 1 : les deux triangles seraient superposables et A serait le milieu de $[BM]$.

Réponse. $MN = 12$ cm.

Correction de l’exercice 3 – L’inconnue au dénominateur

Configuration papillon avec $(BC) \parallel (MN)$: d’après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, soit

$$\frac{6}{10} = \frac{9}{AC}$$

Le premier rapport se simplifie en $\frac{3}{5}$. Le produit en croix donne $3 \times AC = 5 \times 9 = 45$, donc $AC = 15$ cm.

Contrôle : $\frac{9}{15} = 0{,}6$, comme $\frac{6}{10}$. Le rapport est inférieur à 1 : le triangle AMN est une réduction de ABC, même si les deux triangles sont de part et d’autre du point A.

Réponse. $AC = 15$ cm.

Correction de l’exercice 4 – Trois longueurs à trouver

a) Configuration papillon avec $(BC) \parallel (MN)$. Le rapport se lit sur les deux longueurs connues portées par la même droite :

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Le triangle AMN est une réduction de ABC.

b) D’après le théorème de Thalès, $\frac{AN}{AC} = 0{,}4$, donc $AC = 6 \div 0{,}4 = 15$ cm. De même $\frac{MN}{BC} = 0{,}4$, donc $BC = 5 \div 0{,}4 = 12{,}5$ cm.

Contrôle : les périmètres valent $4 + 6 + 5 = 15$ cm et $10 + 15 + 12{,}5 = 37{,}5$ cm, et $\frac{15}{37{,}5} = 0{,}4$: ils sont dans le même rapport que les longueurs.

Réponse. a) $k = 0{,}4$ · b) $AC = 15$ cm et $BC = 12{,}5$ cm.

Correction de l’exercice 5 – Reconnaître la configuration

Pour reconnaître la configuration, on regarde où se trouve le point commun A sur chacune des deux droites.

a) M est entre A et B, N entre A et C : A est à l’extrémité des deux segments, c’est la configuration **triangle**. On a $AB = AM + MB$ et le rapport $\frac{AM}{AB}$ est inférieur à 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) A est **entre** B et M, et entre C et N : c'est la configuration **papillon**. On a $BM = AB + AM$.

c) B est entre A et M, C entre A et N : A est encore à l'extrémité, c'est la configuration **triangle**, mais cette fois $AM > AB$, donc le rapport est supérieur à 1 (agrandissement) et $AM = AB + BM$.

Dans les trois cas, les rapports s'écrivent de la même façon :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Seul le calcul des longueurs annexes (MB, BM…) change.

Réponse. a) triangle · b) papillon · c) triangle (avec agrandissement).

Correction de l'exercice 6 – Un agrandissement

a) Le point B appartient au segment $[AM]$, donc les longueurs s'ajoutent :

$$AM = AB + BM = 8 + 12 = 20 \text{ cm}$$

b) Configuration triangle avec $(BC) \parallel (MN)$: d'après le théorème de Thalès, le rapport vaut $k = \frac{AM}{AB} = \frac{20}{8} = 2{,}5$. Le triangle AMN est un agrandissement de ABC, donc $MN = 2{,}5 \times BC = 2{,}5 \times 6 = 15$ cm.

Contrôle : $MN = 15$ cm est bien plus grand que $BC = 6$ cm, cohérent avec un agrandissement. Les aires sont multipliées par $2{,}5^2 = 6{,}25$: si l'aire de ABC vaut 16 cm², celle de AMN vaut 100 cm².

Réponse. a) $AM = 20$ cm · b) $k = 2{,}5$ et $MN = 15$ cm.

Correction de l'exercice 7 – Avec des fractions

Configuration papillon avec $(BC) \parallel (MN)$: d'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. On calcule d'abord le premier rapport : diviser par 5 revient à multiplier par $\frac{1}{5}$,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{15}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

On a donc $\frac{AN}{4} = 1{,}5$, soit $AN = 1{,}5 \times 4 = 6$ cm.

Contrôle avec l'écriture décimale : $AM = 7{,}5$ cm et $\frac{7{,}5}{5} = 1{,}5$, puis $\frac{6}{4} = 1{,}5$. Les deux rapports sont bien égaux.

Réponse. $AN = 6$ cm.

Correction de l'exercice 8 – Le viseur

La mire et la tour sont toutes deux verticales, donc parallèles. L'œil A, le haut de la mire et le sommet de la tour sont alignés : on reconnaît une configuration de Thalès de sommet A, avec le rapport des distances à l'observateur

$$k = \frac{40}{2} = 20$$

La tour est vingt fois plus loin que la mire, donc vingt fois plus haute que la mire. En mètres, la mire mesure 0,3 m, d'où une hauteur de $20 \times 0{,}3 = 6$ m. La tour mesure 6 m.

Contrôle par le produit en croix : $\frac{0{,}3}{2} = \frac{h}{40}$ donne $2h = 12$, soit $h = 6$ m. Attention à la précision : une erreur de 1 cm sur la mire en donne 20 sur la tour.

Réponse. La tour mesure 6 m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Une distance inaccessible

Les points B, A, M et C, A, N sont alignés avec $(MN) \parallel (BC)$: c'est une configuration papillon. D'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit

$$\frac{8}{24} = \frac{5}{BC}$$

Le premier rapport vaut $\frac{1}{3}$: MN est le tiers de BC, donc $BC = 3 \times 5 = 15$ m.

Piège : utiliser $BM = 24 + 8 = 32$ m à la place de AB donnerait $BC = 20$ m, cinq mètres de trop. Le rapport compare AM à AB, les deux longueurs mesurées depuis le point commun A. Tout se mesure du côté accessible : c'est l'intérêt de la méthode.

Réponse. $BC = 15$ m.

Correction de l'exercice 10 – Deux configurations enchaînées

a) $(PQ) \parallel (MN)$: le triangle APQ est une réduction de AMN de rapport $\frac{AP}{AM} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

b) De même, AMN est une réduction de ABC de rapport $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Enchaîner deux réductions revient à multiplier les rapports :

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

On le vérifie directement : (PQ) et (BC) sont toutes deux parallèles à (MN), donc parallèles entre elles, et $\frac{AP}{AB} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

c) $MN = \frac{1}{3} \times 18 = 6$ cm, puis $PQ = \frac{3}{4} \times 6 = 4{,}5$ cm. Contrôle direct : $\frac{1}{4} \times 18 = 4{,}5$ cm.

Réponse. a) 0,75 · b) $\frac{1}{4}$ · c) $MN = 6$ cm et $PQ = 4{,}5$ cm.

Correction de l'exercice 11 – Comparer les deux configurations

a) En configuration triangle, B est entre A et M (puisque $AM > AB$). Le théorème de Thalès donne $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, soit $\frac{6}{4} = \frac{AN}{10}$, donc $AN = 1{,}5 \times 10 = 15$.

b) En configuration papillon, les rapports s'écrivent exactement de la même façon :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad \text{donc} \quad AN = 15$$

On constate que le résultat est **le même** : le théorème ne dépend pas de la position des points. Ce qui change, ce sont les longueurs annexes. En triangle, $BM = AM - AB = 2$ et $CN = 15 - 10 = 5$; en papillon, $BM = AM + AB = 10$ et $CN = 15 + 10 = 25$.

Réponse. $AN = 15$ dans les deux cas ; seules les longueurs BM et CN diffèrent.

Correction de l'exercice 12 – Périmètres et rapport

a) Le rapport se lit sur les deux longueurs connues portées par la même droite :

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

Le triangle AMN est un agrandissement de ABC.

b) Toutes les longueurs sont multipliées par 2,5, donc le périmètre aussi : $2{,}5 \times 28 = 70$ cm.

c) Les aires sont multipliées par $k^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$: l'aire de AMN vaut $6{,}25 \times 24 = 150$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

cm².

Piège : multiplier l'aire par 2,5 donnerait 60 cm², bien trop peu. À retenir : longueurs et périmètres en k, aires en k^2.

Réponse. a) $k = 2{,}5$ · b) 70 cm · c) 150 cm².

Correction de l'exercice 13 – Repérer une incohérence

Si l'énoncé était cohérent, le théorème de Thalès imposerait l'égalité des rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$. On les calcule :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667 \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Les deux rapports sont différents : l'énoncé est **incohérent**. Une des données est fausse, ou bien les droites ne sont pas parallèles.

Pour le rendre cohérent en gardant le parallélisme, il faudrait par exemple $\frac{8}{AC} = \frac{2}{3}$, c'est-à-dire $AC = 12$, ou bien $AN = \frac{2}{3} \times 10 \approx 6{,}67$. Avant de calculer, il est utile de vérifier qu'un énoncé ne se contredit pas.

Réponse. Non : $\frac{6}{9} \neq \frac{8}{10}$, les rapports devraient être égaux.

Correction de l'exercice 14 – Le pantographe

a) Le rapport d'agrandissement est le quotient des deux longueurs du pantographe :

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{45}{15} = 3$$

b) Les longueurs sont multipliées par 3 : un trait de 2,4 cm devient $3 \times 2{,}4 = 7{,}2$ cm.

c) Les aires sont multipliées par $k^2 = 9$: le carré de 4 cm² devient un carré de $9 \times 4 = 36$ cm².

Contrôle : un carré de 4 cm² a un côté de 2 cm ; agrandi, son côté mesure 6 cm et son aire $6 \times 6 = 36$ cm². Multiplier l'aire par 3 seulement donnerait 12 cm², trois fois trop peu.

Réponse. a) $k = 3$ · b) 7,2 cm · c) 36 cm².

Correction de l'exercice 15 – Une maquette

a) À l'échelle $\frac{1}{50}$, les longueurs sont divisées par 50 : $12 \div 50 = 0{,}24$ m, soit 24 cm sur la maquette.

b) Les aires sont multipliées par $k^2 = \left(\frac{1}{50}\right)^2 = \frac{1}{2500}$:

$$200 \div 2500 = 0{,}08 \text{ m}^2 = 800 \text{ cm}^2$$

car 1 m² vaut 10 000 cm².

c) Les volumes sont multipliés par $k^3 = \frac{1}{125\,000}$: $150 \div 125\,000 = 0{,}0012$ m³. Comme 1 m³ vaut 1000 L, le volume sur la maquette est de 1,2 L.

À retenir : dans une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3.

Réponse. a) 24 cm · b) 800 cm² · c) 1,2 L.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : papillon complet

a) Configuration papillon avec $(BC) \parallel (MN)$: le rapport vaut

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

Il est supérieur à 1 : AMN est un agrandissement de ABC.

b) D’après le théorème de Thalès, on multiplie par $\frac{5}{3}$: $AN = \frac{5}{3} \times 12 = 20$ cm et $MN = \frac{5}{3} \times 15 = 25$ cm.

c) A est entre B et M et entre C et N, donc les longueurs s’ajoutent : $BM = 9 + 15 = 24$ cm et $CN = 12 + 20 = 32$ cm.

d) Les aires sont multipliées par $k^2 = \frac{25}{9} \approx 2{,}78$. On peut le vérifier : $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$, donc ABC est rectangle en A et son aire vaut $\frac{9 \times 12}{2} = 54$ cm². L’aire de AMN vaut alors $\frac{25}{9} \times 54 = 150$ cm².

Réponse. a) $k = \frac{5}{3}$ · b) $AN = 20$ cm, $MN = 25$ cm · c) $BM = 24$ cm, $CN = 32$ cm · d) le rapport des aires vaut $\frac{25}{9}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).