Plaquette 2 – Configuration triangle : calculer une longueur

Théorème de Thalès — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le théorème. Si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Comment ne pas se tromper dans l'écriture.

Au numérateur	Au dénominateur
les longueurs du **petit** triangle AMN	celles du **grand** triangle ABC
le sommet commun A en premier	le sommet commun A en premier
AM, AN, MN	AB, AC, BC

Ordre des lettres. Les trois fractions doivent se lire dans le même ordre : A vers B au dénominateur correspond à A vers M au numérateur.

Produit en croix. De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$ on tire

$$a \times d = b \times c$$

Pièges fréquents.

Piège	Correction
confondre AM et MB	$AB = AM + MB$ dans la configuration triangle
écrire $\frac{AM}{MB}$	le théorème compare au côté **entier** AB
mélanger l'ordre des lettres	toujours partir du sommet commun

Rapport de réduction. Le nombre $k = \frac{AM}{AB}$ est le même pour les trois rapports : le triangle AMN est une **réduction** de ABC de rapport k. Les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2.

Contrôle final. Une longueur calculée doit être positive et cohérente : $AM < AB$ dans cette configuration.

Correction de l'exercice 1 – Première application

Les points M et N sont sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$: c'est la configuration triangle. D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

On garde les deux premiers rapports, qui contiennent les longueurs connues et l'inconnue : $\frac{3}{9} = \frac{4}{AC}$. Le premier rapport se simplifie en $\frac{1}{3}$; le produit en croix donne $1 \times AC = 3 \times 4$, donc $AC = 12$ cm.

Contrôle : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, on retrouve bien le rapport $\frac{AM}{AB}$. Le triangle AMN est une réduction de ABC de rapport $\frac{1}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $AC = 12$ cm.

Correction de l’exercice 2 – Calculer le segment parallèle

Configuration triangle avec $(MN) \parallel (BC)$: d’après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$. On choisit ce rapport car il contient l’inconnue MN et les deux longueurs données AM et AB :

$$\frac{4}{10} = \frac{MN}{15}$$

Le rapport de réduction vaut $\frac{4}{10} = 0{,}4$: chaque longueur du petit triangle AMN s’obtient en multipliant la longueur correspondante de ABC par 0,4. Donc $MN = 0{,}4 \times 15 = 6$ cm.

Contrôle : $MN = 6$ cm est bien plus petit que $BC = 15$ cm, ce qui est normal pour une réduction.

Réponse. $MN = 6$ cm.

Correction de l’exercice 3 – Deux longueurs à calculer

a) Configuration triangle avec $(MN) \parallel (BC)$: le théorème de Thalès donne $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, soit $\frac{8}{12} = \frac{AN}{15}$. Le premier rapport se simplifie en $\frac{2}{3}$, donc

$$AN = \frac{2}{3} \times 15 = 10 \text{ cm}$$

b) Les points M et N sont sur les segments $[AB]$ et $[AC]$, donc les longueurs s’ajoutent : $MB = AB - AM = 12 - 8 = 4$ cm et $NC = AC - AN = 15 - 10 = 5$ cm.

Remarque : $\frac{MB}{AB} = \frac{4}{12}$ et $\frac{NC}{AC} = \frac{5}{15}$ valent tous deux $\frac{1}{3}$. C’est une conséquence du théorème ; en contrôle, on cite l’égalité qui compare aux côtés entiers AB et AC.

Réponse. a) $AN = 10$ cm · b) $MB = 4$ cm et $NC = 5$ cm.

Correction de l’exercice 4 – L’inconnue au numérateur

Configuration triangle avec $(MN) \parallel (BC)$: d’après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. L’inconnue AM est cette fois au numérateur :

$$\frac{AM}{21} = \frac{8}{12}$$

Le second rapport se simplifie en $\frac{2}{3}$. On multiplie les deux membres par 21 : $AM = \frac{2}{3} \times 21 = 14$ cm.

Contrôle : $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$, et $AM = 14$ cm est bien inférieur à $AB = 21$ cm, puisque M est sur le segment $[AB]$. On en déduit aussi $MB = 21 - 14 = 7$ cm.

Réponse. $AM = 14$ cm.

Correction de l’exercice 5 – On donne MB au lieu de AM

a) Le point M appartient au segment $[AB]$, donc les longueurs AM et MB s’ajoutent :

$$AB = AM + MB = 5 + 3 = 8 \text{ cm}$$

b) Configuration triangle avec $(MN) \parallel (BC)$: le théorème de Thalès donne $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, soit $\frac{5}{8} = \frac{AN}{16}$. Le produit en croix donne $8 \times AN = 5 \times 16 = 80$, donc $AN = 10$ cm. Enfin

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$NC = AC - AN = 16 - 10 = 6$ cm.

Piège : mettre $MB = 3$ au dénominateur à la place de AB. Le théorème compare toujours au côté entier : $\frac{5}{3} = \frac{AN}{16}$ donnerait $AN \approx 26{,}7$ cm, plus long que AC, ce qui est impossible.

Réponse. a) $AB = 8$ cm · b) $AN = 10$ cm et $NC = 6$ cm.

Correction de l'exercice 6 – Retrouver le grand côté

Configuration triangle avec $(MN) \parallel (BC)$: d'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit

$$\frac{6}{15} = \frac{8}{BC}$$

Le premier rapport se simplifie en $\frac{2}{5}$. Le produit en croix donne $2 \times BC = 5 \times 8 = 40$, donc $BC = 20$ cm.

Contrôle : $\frac{8}{20} = 0{,}4$ et $\frac{6}{15} = 0{,}4$, les deux rapports sont égaux. Autre façon de voir : le grand triangle est un agrandissement du petit de rapport $\frac{15}{6} = 2{,}5$, et $8 \times 2{,}5 = 20$.

Réponse. $BC = 20$ cm.

Correction de l'exercice 7 – Périmètre du petit triangle

a) Configuration triangle avec $(MN) \parallel (BC)$: le triangle AMN est une réduction de ABC, de rapport

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

b) Chaque longueur de AMN s'obtient en multipliant la longueur correspondante de ABC par $\frac{2}{3}$: $AN = \frac{2}{3} \times 15 = 10$ cm et $MN = \frac{2}{3} \times 18 = 12$ cm. Le périmètre de AMN vaut $8 + 10 + 12 = 30$ cm.

Contrôle : le périmètre de ABC vaut $12 + 15 + 18 = 45$ cm, et $\frac{2}{3} \times 45 = 30$ cm. Les périmètres sont dans le même rapport que les longueurs.

Réponse. a) $k = \frac{2}{3}$ · b) $AN = 10$ cm, $MN = 12$ cm, périmètre 30 cm.

Correction de l'exercice 8 – Avec des décimaux

Configuration triangle avec $(MN) \parallel (BC)$: d'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, soit $\frac{4{,}5}{7{,}5} = \frac{6}{AC}$. Pour simplifier le premier rapport, on multiplie ses deux termes par 10, puis on divise par 15 : $\frac{45}{75} = \frac{3}{5}$. Le produit en croix donne alors

$$3 \times AC = 5 \times 6 = 30 \quad \text{donc} \quad AC = 10 \text{ cm}$$

Comme N est sur $[AC]$: $NC = AC - AN = 10 - 6 = 4$ cm.

Contrôle : $\frac{6}{10} = 0{,}6$ et $\frac{4{,}5}{7{,}5} = 0{,}6$: le rapport de réduction vaut bien 0,6.

Réponse. $AC = 10$ cm et $NC = 4$ cm.

Correction de l'exercice 9 – La hauteur d'un arbre

Les rayons du soleil sont parallèles : le piquet et son ombre, l'arbre et son ombre forment deux triangles rectangles de même forme. Le rapport « hauteur sur ombre » est donc le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

même pour les deux :

$$\frac{h}{14} = \frac{1{,}8}{1{,}2} = 1{,}5$$

La hauteur vaut une fois et demie l'ombre, donc $h = 1{,}5 \times 14 = 21$ m. L'arbre mesure 21 m.

Condition : les deux ombres doivent être mesurées au même instant ; sinon le soleil n'a plus la même hauteur dans le ciel et les deux triangles n'ont plus la même forme.

Réponse. L'arbre mesure 21 m.

Correction de l'exercice 10 – La largeur d'une rivière

Configuration triangle avec $(MN) \parallel (BC)$: le théorème de Thalès donne $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit

$$\frac{12}{30} = \frac{9}{BC}$$

Le premier rapport vaut $\frac{2}{5} = 0{,}4$. Le produit en croix donne $2 \times BC = 5 \times 9 = 45$, donc $BC = 22{,}5$ m : la rivière mesure 22,5 m de large.

Contrôle : $\frac{9}{22{,}5} = 0{,}4$. L'intérêt de la méthode est d'obtenir la largeur sans traverser, avec trois mesures prises sur la même berge. Une erreur de mesure se répercute pourtant : avec $AM = 13$ m, on trouverait $BC \approx 20{,}8$ m.

Réponse. $BC = 22{,}5$ m.

Correction de l'exercice 11 – Deux points intermédiaires

Les droites (MN) et (PQ) sont parallèles à (BC) : on applique deux fois le théorème de Thalès dans le triangle ABC.

Pour M, le rapport vaut $\frac{AM}{AB} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, donc $MN = \frac{1}{4} \times 20 = 5$ cm.

Pour P, le rapport vaut $\frac{AP}{AB} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$, donc

$$PQ = \frac{3}{4} \times 20 = 15 \text{ cm}$$

Contrôle : $MN < PQ < BC$. C'est logique : plus le point est loin de A, plus le segment parallèle à (BC) est long. De plus $\frac{MN}{PQ} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, comme $\frac{AM}{AP} = \frac{6}{18}$.

Réponse. $MN = 5$ cm et $PQ = 15$ cm.

Correction de l'exercice 12 – Déterminer une position

On veut $(MN) \parallel (BC)$ avec $MN = 16$ cm : le rapport de réduction est imposé,

$$k = \frac{MN}{BC} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

D'après le théorème de Thalès, ce rapport est aussi $\frac{AM}{AB}$, donc $AM = \frac{2}{3} \times 18 = 12$ cm. Il faut placer M sur $[AB]$ à 12 cm de A, c'est-à-dire aux deux tiers du segment, à 6 cm de B.

Remarque : le problème n'a de solution que si $MN \leq BC$. Pour $MN = 30$ cm, on trouverait $k = 1{,}25$ et $AM = 22{,}5$ cm, plus que AB : M sortirait du segment.

Réponse. M doit être à 12 cm de A (aux deux tiers de $[AB]$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – L'aire du petit triangle

a) Configuration triangle avec $(MN) \parallel (BC)$: AMN est une réduction de ABC de rapport $k = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$.

b) Dans une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k et les aires par k^2. Ici $k^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, donc l'aire de AMN vaut

$$\frac{1}{9} \times 63 = 7 \text{ cm}^2$$

c) Le trapèze $MBCN$ est ce qui reste du grand triangle quand on enlève le petit : $63 - 7 = 56$ cm².

Piège : multiplier l'aire par $\frac{1}{3}$ donnerait 21 cm², trois fois trop. Réduire les longueurs au tiers ne garde qu'un neuvième de l'aire.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) 7 cm² · c) 56 cm².

Correction de l'exercice 14 – Une échelle de dessin

a) La diapositive et le mur sont parallèles : un détail de la diapositive et son image sur le mur forment avec le projecteur A une configuration de Thalès. Le rapport d'agrandissement est le quotient des distances au projecteur :

$$k = \frac{300}{12} = 25$$

b) Toutes les longueurs sont multipliées par 25 : le détail mesure $25 \times 1{,}5 = 37{,}5$ cm sur le mur.

Contrôle par le produit en croix : $\frac{1{,}5}{12} = \frac{t}{300}$ donne $12t = 450$, soit $t = 37{,}5$ cm. Si l'on recule le mur à 600 cm, le rapport double et le détail mesure 75 cm.

Réponse. a) 25 · b) 37,5 cm.

Correction de l'exercice 15 – Repérer l'erreur

Le théorème de Thalès compare les longueurs du petit triangle aux côtés **entiers** du grand : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. L'élève a écrit $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$, qui n'est pas l'énoncé du théorème.

Refaisons le calcul correctement. $AB = AM + MB = 5 + 7 = 12$, donc $\frac{5}{12} = \frac{6}{AC}$ et $5 \times AC = 72$, soit $AC = 14{,}4$ cm. Alors

$$NC = AC - AN = 14{,}4 - 6 = 8{,}4 \text{ cm}$$

Le **résultat** de l'élève est juste, mais sa **justification** ne l'est pas : son égalité est une conséquence du théorème, qu'il faudrait démontrer. En contrôle, on écrit les rapports de l'énoncé officiel.

Réponse. Le résultat $NC = 8{,}4$ cm est juste, mais l'égalité écrite n'est pas celle du théorème.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : un triangle complet

a) Configuration triangle avec $(MN) \parallel (BC)$: AMN est une réduction de ABC de rapport $k = \frac{AM}{AB} = \frac{12}{20} = 0{,}6$.

b) On multiplie les côtés de ABC par 0,6 : $AN = 0{,}6 \times 25 = 15$ cm et $MN = 0{,}6 \times 30 = 18$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

cm. Comme M et N sont sur les côtés : $MB = 20 - 12 = 8$ cm et $NC = 25 - 15 = 10$ cm.

c) Périmètre de ABC : $20 + 25 + 30 = 75$ cm. Périmètre de AMN : $12 + 15 + 18 = 45$ cm, et l'on vérifie que $0{,}6 \times 75 = 45$.

d) Les aires sont multipliées par $k^2 = 0{,}36$: l'aire de AMN vaut $0{,}36 \times 300 = 108$ cm². Le trapèze est ce qui reste :

$$300 - 108 = 192 \text{ cm}^2$$

Le trapèze occupe donc 64 % de l'aire du triangle ABC.

Réponse. a) 0,6 · b) $AN = 15$, $MN = 18$, $MB = 8$, $NC = 10$ cm · c) 45 cm et 75 cm · d) 192 cm².

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).