

Plaquette 2 – Configuration triangle : calculer une longueur

Théorème de Thalès — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le théorème. Si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$, alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Comment ne pas se tromper dans l'écriture.

Au numérateur	Au dénominateur
les longueurs du petit triangle AMN	celles du grand triangle ABC
le sommet commun A en premier	le sommet commun A en premier
AM, AN, MN	AB, AC, BC

Ordre des lettres. Les trois fractions doivent se lire dans le même ordre : A vers B au dénominateur correspond à A vers M au numérateur.

Produit en croix. De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$ on tire

$$a \times d = b \times c$$

Pièges fréquents.

Piège	Correction
confondre AM et MB	$AB = AM + MB$ dans la configuration triangle
écrire $\frac{AM}{MB}$	le théorème compare au côté entier AB
mélanger l'ordre des lettres	toujours partir du sommet commun

Rapport de réduction. Le nombre $k = \frac{AM}{AB}$ est le même pour les trois rapports : le triangle AMN est une **réduction** de ABC de rapport k . Les longueurs sont multipliées par k , les aires par k^2 .

Contrôle final. Une longueur calculée doit être positive et cohérente : $AM < AB$ dans cette configuration.

Correction de l'exercice 1 – Première application

- **Configuration** : triangle, avec $(MN) \parallel (BC)$ ✓
- **Théorème de Thalès** : les rapports sont égaux ✓
- **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ✓
- **Substitution** : $\frac{3}{9} = \frac{4}{AC}$ ✓
- **Simplification du premier rapport** : $\frac{1}{3}$ ✓
- **Produit en croix** : $1 \times AC = 3 \times 4$ ✓
- **Résultat** :

$$AC = 12 \text{ cm}$$

- **Contrôle** : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \checkmark$
- **Concordance avec le premier rapport** $\checkmark$
- **Contrôle de vraisemblance** : $AN < AC \checkmark$
- **Rapport de réduction** : $k = \frac{1}{3} \checkmark$
- **Longueur MB** : $9 - 3 \checkmark$
- **Valeur** : 6 cm $\checkmark$
- **Longueur NC** : $12 - 4 \checkmark$
- **Valeur** : 8 cm $\checkmark$
- **Contrôle** : $\frac{MB}{NC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \checkmark$
- **Et** : $\frac{AM}{AN} = \frac{3}{4} \checkmark$
- **Concordance** $\checkmark$

Réponse. $AC = 12$ cm.

Correction de l'exercice 2 - Calculer le segment parallèle

- **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \checkmark$
- **Substitution** : $\frac{4}{10} = \frac{MN}{15} \checkmark$
- **Simplification du premier rapport** : $\frac{2}{5} \checkmark$
- **Forme décimale** : 0,4 $\checkmark$
- **Produit en croix** : $5 \times MN = 2 \times 15 \checkmark$
- **Calcul** : $5 \times MN = 30 \checkmark$
- **Résultat** :

$$MN = 6 \text{ cm}$$

- **Contrôle** : $\frac{6}{15} = 0,4 \checkmark$
- **Concordance** $\checkmark$
- **Contrôle de vraisemblance** : $MN < BC \checkmark$
- **Rapport de réduction** : $k = 0,4 \checkmark$
- **Méthode directe** : $MN = 0,4 \times 15 \checkmark$
- **Résultat** : 6 cm $\checkmark$
- **Longueur MB** : 6 cm $\checkmark$
- **Rapport** $\frac{MB}{AB}$: 0,6 $\checkmark$
- **Contrôle** : $0,4 + 0,6 = 1 \checkmark$
- **Interprétation** : M est au premier tiers et demi du segment $\checkmark$

Réponse. $MN = 6$ cm.

Correction de l'exercice 3 - Deux longueurs à calculer

- a) **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \checkmark$
- **Substitution** : $\frac{8}{12} = \frac{AN}{15} \checkmark$
- **Simplification** : $\frac{2}{3} \checkmark$
- **Produit en croix** : $3 \times AN = 2 \times 15 \checkmark$

— **Calcul** : $3 \times AN = 30$ ✓

— **Résultat** :

$$AN = 10 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ ✓

b) **Longueur MB** : $AB - AM$ ✓

— **Calcul** : $12 - 8$ ✓

— **Résultat** : 4 cm ✓

— **Longueur NC** : $AC - AN$ ✓

— **Calcul** : $15 - 10$ ✓

— **Résultat** :

$$NC = 5 \text{ cm}$$

— **Contrôle du rapport** : $\frac{MB}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ✓

— **Et** : $\frac{NC}{AC} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Piège à éviter** : écrire $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ comme théorème ✓

— **Vérification de cette égalité** : $\frac{8}{4} = 2$ et $\frac{10}{5} = 2$ ✓

— **Constat** : elle est vraie ici ✓

— **Mais** : ce n'est pas l'énoncé du théorème, c'est une conséquence ✓

Réponse. a) $AN = 10 \text{ cm}$ · b) $MB = 4 \text{ cm}$ et $NC = 5 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 4 - L'inconnue au numérateur

— **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ✓

— **Substitution** : $\frac{AM}{21} = \frac{8}{12}$ ✓

— **Simplification du second rapport** : $\frac{2}{3}$ ✓

— **Produit en croix** : $3 \times AM = 2 \times 21$ ✓

— **Calcul** : $3 \times AM = 42$ ✓

— **Résultat** :

$$AM = 14 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : $14 < 21$ ✓

— **Méthode directe** : $AM = \frac{2}{3} \times 21$ ✓

— **Résultat** : 14 cm ✓

— **Longueur MB** : $21 - 14$ ✓

— **Valeur** : 7 cm ✓

— **Longueur NC** : $12 - 8$ ✓

— **Valeur** : 4 cm ✓

— **Contrôle des rapports restants** : $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ ✓

— **Et** : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ✓

— **Concordance** ✓

Réponse. $AM = 14$ cm.

Correction de l'exercice 5 - On donne MB au lieu de AM

a) **Relation** : $AB = AM + MB$ ✓

— **Justification** : M appartient au segment $[AB]$ ✓

— **Calcul** : $5 + 3$ ✓

— **Résultat** :

$$AB = 8 \text{ cm}$$

b) **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ✓

— **Substitution** : $\frac{5}{8} = \frac{AN}{16}$ ✓

— **Produit en croix** : $8 \times AN = 5 \times 16$ ✓

— **Calcul** : $8 \times AN = 80$ ✓

— **Résultat** :

$$AN = 10 \text{ cm}$$

— **Longueur NC** : $16 - 10$ ✓

— **Résultat** :

$$NC = 6 \text{ cm}$$

— **Contrôle du rapport** : $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ ✓

— **Contrôle complémentaire** : $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ ✓

— **Et** : $\frac{3}{8} = \frac{MB}{AB}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Erreur classique** : utiliser 5 au lieu de 8 au dénominateur ✓

— **Ce que cela donnerait** : $AN = 16$, donc $N = C$ ✓

— **Absurdité** : (MN) serait confondue avec (AC) ✓

Réponse. a) $AB = 8$ cm · b) $AN = 10$ cm et $NC = 6$ cm.

Correction de l'exercice 6 - Retrouver le grand côté

— **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ ✓

— **Substitution** : $\frac{6}{15} = \frac{8}{BC}$ ✓

— **Simplification du premier rapport** : $\frac{2}{5}$ ✓

— **Produit en croix** : $2 \times BC = 5 \times 8$ ✓

— **Calcul** : $2 \times BC = 40$ ✓

— **Résultat** :

$$BC = 20 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $\frac{8}{20} = 0,4$ ✓

— **Et** : $\frac{6}{15} = 0,4$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : $MN < BC$ ✓

- **Rapport de réduction** : $k = 0,4$ ✓
- **Coefficient d'agrandissement inverse** : $\frac{1}{0,4} = 2,5$ ✓
- **Contrôle** : $8 \times 2,5 = 20$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Longueur** MB : 9 cm ✓
- **Rapport** $\frac{MB}{AB}$: 0,6 ✓
- **Contrôle** : $0,4 + 0,6 = 1$ ✓

Réponse. $BC = 20$ cm.

Correction de l'exercice 7 - Périmètre du petit triangle

a) **Rapport** : $k = \frac{AM}{AB}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{8}{12}$ ✓

— **Simplification** :

$$k = \frac{2}{3}$$

— **Valeur approchée** : $\approx 0,667$ ✓

b) **Longueur** AN : $k \times AC$ ✓

— **Calcul** : $\frac{2}{3} \times 15$ ✓

— **Résultat** : 10 cm ✓

— **Longueur** MN : $k \times BC$ ✓

— **Calcul** : $\frac{2}{3} \times 18$ ✓

— **Résultat** :

$$MN = 12 \text{ cm}$$

— **Périmètre de** ABC : $12 + 15 + 18$ ✓

— **Valeur** : 45 cm ✓

— **Périmètre de** AMN : $8 + 10 + 12$ ✓

— **Résultat** :

$$30 \text{ cm}$$

— **Contrôle par le rapport** : $\frac{2}{3} \times 45$ ✓

— **Valeur** : 30 cm ✓

— **Concordance** ✓

— **Règle** : les périmètres sont dans le même rapport que les longueurs ✓

— **Rapport des aires** : $k^2 = \frac{4}{9}$ ✓

— **Interprétation** : l'aire de AMN vaut les quatre neuvièmes de celle de ABC ✓

Réponse. a) $k = \frac{2}{3}$ · b) $AN = 10$ cm, $MN = 12$ cm, périmètre 30 cm.

Correction de l'exercice 8 - Avec des décimaux

— **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ✓

— **Substitution** : $\frac{4,5}{7,5} = \frac{6}{AC}$ ✓

— **Simplification du premier rapport** : $\frac{45}{75}$ ✓

— **Division par 15** : $\frac{3}{5}$ ✓

— **Forme décimale** : 0,6 ✓

— **Produit en croix** : $3 \times AC = 5 \times 6$ ✓

— **Calcul** : $3 \times AC = 30$ ✓

— **Résultat** :

$$AC = 10 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $\frac{6}{10} = 0,6$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Longueur NC** : $10 - 6$ ✓

— **Résultat** :

$$NC = 4 \text{ cm}$$

— **Longueur MB** : $7,5 - 4,5$ ✓

— **Valeur** : 3 cm ✓

— **Contrôle des rapports** : $\frac{3}{7,5} = 0,4$ ✓

— **Et** : $\frac{4}{10} = 0,4$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Rapport de réduction** : 0,6 ✓

— **Conseil** : passer aux entiers en multipliant par 10 simplifie les calculs ✓

Réponse. $AC = 10 \text{ cm}$ et $NC = 4 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 9 - La hauteur d'un arbre

— **Modélisation** : deux triangles rectangles semblables ✓

— **Raison** : les rayons du soleil sont parallèles ✓

— **Égalité des rapports** : $\frac{\text{hauteur}}{\text{ombre}}$ est la même ✓

— **Rapport du piquet** : $\frac{1,8}{1,2}$ ✓

— **Simplification** : 1,5 ✓

— **Interprétation** : la hauteur vaut 1,5 fois l'ombre ✓

— **Équation pour l'arbre** : $\frac{h}{14} = 1,5$ ✓

— **Calcul** : $h = 1,5 \times 14$ ✓

— **Résultat** :

$$h = 21 \text{ m}$$

— **Contrôle** : $\frac{21}{14} = 1,5$ ✓

— **Concordance avec le piquet** ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : 21 m pour un grand arbre est plausible ✓

— **Méthode alternative, produit en croix** : $1,2 \times h = 1,8 \times 14$ ✓

— **Calcul** : $1,2h = 25,2$ ✓

— **Résultat** : $h = 21 \text{ m}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Condition de validité** : les deux mesures au **même instant** ✓

— **Raison** : l'angle du soleil change au cours de la journée ✓

Réponse. L'arbre mesure 21 m.

Correction de l'exercice 10 - La largeur d'une rivière

— **Configuration** : triangle, avec $(MN) \parallel (BC)$ ✓

— **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ ✓

— **Substitution** : $\frac{12}{30} = \frac{9}{BC}$ ✓

— **Simplification du premier rapport** : $\frac{2}{5}$ ✓

— **Forme décimale** : 0,4 ✓

— **Produit en croix** : $2 \times BC = 5 \times 9$ ✓

— **Calcul** : $2 \times BC = 45$ ✓

— **Résultat** :

$$BC = 22,5 \text{ m}$$

— **Contrôle** : $\frac{9}{22,5} = 0,4$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : 22,5 m pour une rivière est plausible ✓

— **Intérêt de la méthode** : on n'a jamais traversé la rivière ✓

— **Mesures réellement effectuées** : trois longueurs sur la berge ✓

— **Précision** : elle dépend de l'alignement des piquets ✓

— **Effet d'une erreur de 1 m sur AM** : BC passerait à environ 20,8 m ✓

— **Contrôle** : $\frac{13}{30}$ donne $BC = \frac{270}{13} \approx 20,8$ ✓

— **Leçon** : sur le terrain, on multiplie les mesures ✓

Réponse. $BC = 22,5 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 11 - Deux points intermédiaires

— **Premier rapport** : $\frac{AM}{AB} = \frac{6}{24}$ ✓

— **Simplification** : $\frac{1}{4}$ ✓

— **Longueur MN** : $\frac{1}{4} \times 20$ ✓

— **Résultat** :

$$MN = 5 \text{ cm}$$

— **Second rapport** : $\frac{AP}{AB} = \frac{18}{24}$ ✓

— **Simplification** : $\frac{3}{4}$ ✓

— **Longueur PQ** : $\frac{3}{4} \times 20$ ✓

— **Résultat** :

$$PQ = 15 \text{ cm}$$

— **Contrôle de l'ordre** : $MN < PQ < BC$ ✓

— **Cohérence** : plus on s'éloigne de A, plus le segment est long ✓

— **Rapport** $\frac{MN}{PQ} : \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ✓

- **Contrôle** : $\frac{AM}{AP} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Longueur MP** : $18 - 6$ ✓
- **Valeur** : 12 cm ✓
- **Rapport** $\frac{MP}{AB} : \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Remarque** : les droites (MN) et (PQ) sont parallèles entre elles ✓
- **Raison** : elles sont toutes deux parallèles à (BC) ✓

Réponse. $MN = 5$ cm et $PQ = 15$ cm.

Correction de l'exercice 12 - Déterminer une position

- **Rapport imposé** : $\frac{MN}{BC} = \frac{16}{24}$ ✓
- **Simplification** : $\frac{2}{3}$ ✓
- **Égalité de Thalès** : $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Substitution** : $\frac{AM}{18} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Produit en croix** : $3 \times AM = 36$ ✓
- **Résultat** :
$$AM = 12 \text{ cm}$$
- **Position de M** : à 12 cm de A sur [AB] ✓
- **Longueur MB** : $18 - 12$ ✓
- **Valeur** : 6 cm ✓
- **Contrôle** : $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Concordance avec le rapport imposé** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : $12 < 18$ ✓
- **Interprétation** : M est aux deux tiers de [AB] ✓
- **Si on voulait MN = 24 cm** : $k = 1$ ✓
- **Conséquence** : M serait confondu avec B ✓
- **Si on voulait MN = 30 cm** : $k = 1,25 > 1$ ✓
- **Conclusion** : impossible, M sortirait du segment ✓

Réponse. M doit être à 12 cm de A (aux deux tiers de [AB]).

Correction de l'exercice 13 - L'aire du petit triangle

- a) **Rapport** : $k = \frac{AM}{AB}$ ✓
- **Valeur** :
$$k = \frac{1}{3}$$
- b) **Règle** : les aires sont multipliées par k^2 ✓
- **Calcul de k^2** : $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ✓
- **Valeur** : $\frac{1}{9}$ ✓
- **Aire de AMN** : $\frac{1}{9} \times 63$ ✓

— **Résultat :**

$$7 \text{ cm}^2$$

— **Piège :** multiplier l'aire par $\frac{1}{3}$ ✓

— **Ce que cela donnerait :** 21 cm^2 , trois fois trop ✓

c) **Aire du trapèze :** aire totale moins aire du petit triangle ✓

— **Calcul :** $63 - 7$ ✓

— **Résultat :**

$$56 \text{ cm}^2$$

— **Part du trapèze :** $\frac{56}{63}$ ✓

— **Simplification :** $\frac{8}{9}$ ✓

— **Contrôle :** $\frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$ ✓

— **Interprétation :** réduire les longueurs d'un tiers ne garde qu'un neuvième de l'aire ✓

— **Cas où l'aire serait la moitié :** $k^2 = \frac{1}{2}$ ✓

— **Valeur de k :** $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ ✓

— **Interprétation :** il faudrait placer M à environ 71 % de $[AB]$ ✓

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) 7 cm^2 · c) 56 cm^2 .

Correction de l'exercice 14 - Une échelle de dessin

a) **Configuration :** deux triangles de sommet commun A ✓

— **Parallélisme :** la diapositive et le mur sont parallèles ✓

— **Rapport :** $\frac{300}{12}$ ✓

— **Résultat :**

$$25$$

— **Interprétation :** l'image est 25 fois plus grande ✓

b) **Taille sur le mur :** $25 \times 1,5$ ✓

— **Résultat :**

$$37,5 \text{ cm}$$

— **Contrôle par produit en croix :** $\frac{1,5}{12} = \frac{t}{300}$ ✓

— **Calcul :** $12t = 450$ ✓

— **Résultat :** $t = 37,5 \text{ cm}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Taille d'un détail de 0,4 cm :** 10 cm ✓

— **Diapositive de 3,6 cm de large :** image de 90 cm ✓

— **Rapport des aires :** $25^2 = 625$ ✓

— **Interprétation :** la surface éclairée est 625 fois plus grande ✓

— **Effet d'un recul du mur à 600 cm :** rapport 50 ✓

— **Nouvelle taille du détail :** 75 cm ✓

— **Règle :** doubler la distance double la taille de l'image ✓

Réponse. a) 25 · b) $37,5 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 15 - Repérer l'erreur

- **Théorème de Thalès** : il compare aux côtés **entiers** ✓
- **Écriture correcte** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ✓
- **Ce qu'a écrit l'élève** : $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ✓
- **Statut de cette égalité** : ce n'est pas l'énoncé du théorème ✓
- **Est-elle vraie pour autant ?** ✓
- **Longueur AB** : $5 + 7 = 12$ ✓
- **Rapport de Thalès** : $\frac{5}{12}$ ✓
- **Équation correcte** : $\frac{5}{12} = \frac{6}{AC}$ ✓
- **Produit en croix** : $5 \times AC = 72$ ✓
- **Résultat** : $AC = 14,4$ cm ✓
- **Longueur NC** : $14,4 - 6$ ✓
- **Résultat** :

$$NC = 8,4 \text{ cm}$$

- **Comparaison avec la réponse de l'élève** : identique ✓
- **Conclusion** : le **résultat** est juste, la **justification** ne l'est pas ✓
- **Pourquoi cela fonctionne** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ entraîne $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ✓
- **Statut de cette propriété** : une conséquence, à démontrer ✓
- **Conseil** : en contrôle, écrire les rapports de l'énoncé officiel ✓
- **Contrôle final** : $\frac{6}{14,4} = \frac{5}{12}$ ✓

Réponse. Le résultat $NC = 8,4$ cm est juste, mais l'égalité écrite n'est pas celle du théorème.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un triangle complet

a) **Rapport** : $\frac{AM}{AB} = \frac{12}{20}$ ✓

— **Simplification** :

$$k = 0,6$$

b) **Longueur AN** : $0,6 \times 25$ ✓

— **Résultat** : 15 cm ✓

— **Longueur MN** : $0,6 \times 30$ ✓

— **Résultat** :

$$MN = 18 \text{ cm}$$

— **Longueur MB** : $20 - 12$ ✓

— **Résultat** : 8 cm ✓

— **Longueur NC** : $25 - 15$ ✓

— **Résultat** : 10 cm ✓

— **Contrôle** : $\frac{8}{20} = \frac{10}{25} = 0,4$ ✓

c) **Périmètre de ABC** : $20 + 25 + 30$ ✓

— **Résultat** : 75 cm ✓

— **Périmètre de AMN** : $12 + 15 + 18$ ✓

— **Résultat** :

45 cm

— **Contrôle par le rapport** : $0,6 \times 75 = 45$ cm ✓

— **Concordance** ✓

d) **Rapport des aires** : k^2 ✓

— **Calcul** : $0,6^2 = 0,36$ ✓

— **Aire de AMN** : $0,36 \times 300$ ✓

— **Résultat** : 108 cm^2 ✓

— **Aire du trapèze** : $300 - 108$ ✓

— **Résultat** :

192 cm²

— **Part du trapèze** : $\frac{192}{300} = 64\%$ ✓

— **Contrôle** : $1 - 0,36 = 0,64$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Remarque** : réduire de 40 % les longueurs retire 64 % de l'aire ✓

Réponse. a) $0,6$ · b) $AN = 15$, $MN = 18$, $MB = 8$, $NC = 10$ cm · c) 45 cm et 75 cm · d) 192 cm².