Plaquette 5 – Mesures indirectes et problèmes concrets

Théorème de Thalès — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Modéliser une mesure indirecte. On repère deux triangles semblables et on identifie le sommet commun.

Situation	Ce qui est parallèle
ombres au soleil	les rayons du soleil, et les deux objets verticaux
viseur ou mire	l'objet visé et la mire, tous deux verticaux
miroir posé au sol	les deux verticales, l'observateur et l'objet
projection	l'écran et l'objet projeté

Les deux règles de calcul.

$$\text{longueurs} \times k \qquad \text{aires} \times k^2 \qquad \text{volumes} \times k^3$$

Échelle d'un plan. Une échelle $\frac{1}{n}$ signifie que 1 cm sur le plan représente n cm en réalité.

Grandeur	Coefficient entre plan et réalité
longueur	n
aire	n^2
volume	n^3

Conversions utiles.

Égalité	Valeur
1 m	100 cm
1 m²	10 000 cm²
1 m³	1000 L
1 km	100 000 cm

Contrôle de vraisemblance. Une hauteur d'arbre de 300 m ou une rivière de 2 cm signalent une erreur d'unité ou un rapport inversé. On vérifie toujours l'ordre de grandeur avant de conclure.

Rédiger. On nomme les points, on cite le parallélisme, on écrit les rapports, on calcule, puis on répond par une phrase avec l'unité.

Correction de l'exercice 1 – La hauteur d'un immeuble

Les rayons du soleil sont parallèles : le bâton et son ombre, l'immeuble et son ombre forment deux triangles rectangles de même forme. Le rapport « hauteur sur ombre » est le même pour les deux. Pour le bâton,

$$\frac{1{,}6}{2} = 0{,}8$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

La hauteur vaut donc 0,8 fois l'ombre, et pour l'immeuble $h = 0{,}8 \times 35 = 28$ m.

Contrôle par le produit en croix : $2h = 1{,}6 \times 35 = 56$, donc $h = 28$ m, soit environ neuf étages. Les deux ombres doivent être mesurées au même instant : plus tard dans la journée, elles s'allongent et le rapport change.

Réponse. L'immeuble mesure 28 m.

Correction de l'exercice 2 – La largeur d'un lac

Configuration triangle avec $(MN) \parallel (BC)$: d'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$, soit

$$\frac{15}{60} = \frac{22}{BC}$$

Le premier rapport vaut $\frac{1}{4}$: le petit triangle est quatre fois plus petit que le grand, donc $BC = 4 \times 22 = 88$ m. Le lac mesure 88 m de large.

Contrôle : $\frac{22}{88} = 0{,}25$. La précision dépend des mesures : une erreur de 1 m sur MN fait varier BC de 4 m, d'où l'intérêt de prendre MN aussi grand que possible.

Réponse. $BC = 88$ m.

Correction de l'exercice 3 – La profondeur d'un puits

La ligne de visée rase le bord du puits : elle forme deux triangles rectangles de part et d'autre de ce bord. Le petit a pour côtés la hauteur de l'œil (1,6 m) et le recul (0,5 m) ; le grand a pour côtés la profondeur p et le diamètre (1,2 m). La paroi et la verticale de l'œil sont parallèles, donc les deux triangles ont la même forme et le rapport « vertical sur horizontal » est le même :

$$\frac{p}{1{,}2} = \frac{1{,}6}{0{,}5} = 3{,}2$$

D'où $p = 3{,}2 \times 1{,}2 = 3{,}84$ m.

Contrôle par le produit en croix : $0{,}5p = 1{,}6 \times 1{,}2 = 1{,}92$, donc $p = 3{,}84$ m. Le puits a une profondeur de 3,84 m, soit un peu moins de 4 m.

Réponse. Le puits a une profondeur de 3,84 m.

Correction de l'exercice 4 – Le miroir au sol

Le rayon lumineux se réfléchit sur le miroir en faisant le même angle à l'aller et au retour. Les deux triangles rectangles (œil, pieds, miroir) et (sommet, pied du bâtiment, miroir) ont donc la même forme, et le rapport « hauteur sur distance au miroir » est le même :

$$\frac{h}{9{,}6} = \frac{1{,}65}{2{,}4}$$

Le produit en croix donne $2{,}4h = 1{,}65 \times 9{,}6 = 15{,}84$, donc $h = 15{,}84 \div 2{,}4 = 6{,}6$ m. Le bâtiment mesure 6,6 m.

Contrôle : le bâtiment est $\frac{9{,}6}{2{,}4} = 4$ fois plus loin du miroir que l'observateur, il est donc 4 fois plus haut que l'œil : $4 \times 1{,}65 = 6{,}6$ m.

Réponse. Le bâtiment mesure 6,6 m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Un plan à l’échelle

À l’échelle $\frac{1}{200}$, une longueur sur le plan est 200 fois plus petite que la longueur réelle. On travaille en centimètres.

a) 4,8 m = 480 cm, donc la pièce mesure $480 \div 200 = 2{,}4$ cm sur le plan.

b) Le couloir mesure $3 \times 200 = 600$ cm, soit 6 m en réalité.

c) Les aires sont divisées par le **carré** de 200, c’est-à-dire par 40 000. Or 24 m² = 240 000 cm², donc

$$240\,000 \div 40\,000 = 6 \text{ cm}^2$$

Contrôle : une pièce de 6 m sur 4 m (24 m²) est dessinée par un rectangle de 3 cm sur 2 cm, d’aire 6 cm². Diviser l’aire par 200 seulement donnerait 1200 cm², absurde pour un plan.

Réponse. a) 2,4 cm · b) 6 m · c) 6 cm².

Correction de l’exercice 6 – Agrandir une photo

a) Pour agrandir sans déformer, il faut multiplier la longueur et la largeur par le même nombre. On compare les deux rapports :

$$\frac{36}{15} = 2{,}4 \qquad \frac{24}{10} = 2{,}4$$

Ils sont égaux : l’agrandissement est possible sans déformation.

b) Le rapport d’agrandissement vaut $k = 2{,}4$: toutes les longueurs de la photo sont multipliées par 2,4.

c) L’aire est multipliée par $k^2 = 2{,}4^2 = 5{,}76$. **Contrôle** : l’aire passe de $10 \times 15 = 150$ cm² à $24 \times 36 = 864$ cm², et $864 \div 150 = 5{,}76$. Un tirage en 13×18, en revanche, déformerait l’image : $\frac{13}{10} = 1{,}3$ mais $\frac{18}{15} = 1{,}2$.

Réponse. a) oui, les rapports coïncident · b) $k = 2{,}4$ · c) l’aire est multipliée par 5,76.

Correction de l’exercice 7 – Une projection

a) La diapositive et l’écran sont parallèles : on a une configuration de Thalès de sommet le projecteur. Le rapport d’agrandissement est le quotient des distances :

$$k = \frac{6}{1{,}5} = 4$$

b) L’image mesure $4 \times 2{,}4 = 9{,}6$ cm sur l’écran. Contrôle par le produit en croix : $1{,}5t = 2{,}4 \times 6 = 14{,}4$, donc $t = 9{,}6$ cm.

c) Avec l’écran à 9 m, le rapport devient $\frac{9}{1{,}5} = 6$ et l’image mesure $6 \times 2{,}4 = 14{,}4$ cm. Elle a été multipliée par 1,5, comme la distance ($\frac{9}{6} = 1{,}5$), et son aire par $1{,}5^2 = 2{,}25$: la même lumière s’étale sur une surface plus grande, l’image est moins lumineuse.

Réponse. a) $k = 4$ · b) 9,6 cm · c) l’image passe à 14,4 cm.

Correction de l’exercice 8 – La pente d’une route

a) Une pente de 6 % signifie 6 m de dénivelé pour 100 m parcourus à l’horizontale : le dénivelé est proportionnel à la distance horizontale, avec le coefficient 0,06. Sur 250 m,

$$0{,}06 \times 250 = 15 \text{ m}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On cherche la distance d telle que $0{,}06d = 42$, donc $d = 42 \div 0{,}06 = 700$ m. Contrôle mental : 6 m pour 100 m, donc $42 = 7 \times 6$ m pour $7 \times 100 = 700$ m.

Remarque : la longueur parcourue sur la route est l'hypoténuse, $\sqrt{700^2 + 42^2} \approx 701{,}3$ m. Pour une pente faible, elle se confond presque avec la distance horizontale.

Réponse. a) 15 m · b) 700 m.

Correction de l'exercice 9 – Un escalier

a) La hauteur totale est 2,52 m = 252 cm, partagée en 14 marches identiques :

$$252 \div 14 = 18 \text{ cm}$$

C'est une hauteur de marche courante (entre 16 et 19 cm).

b) La longueur horizontale est la somme des 14 girons : $14 \times 27 = 378$ cm, soit 3,78 m.

c) La pente est le quotient de la hauteur par la longueur horizontale : $\frac{252}{378} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$, soit environ 66,7 %.

Contrôle sur une seule marche : $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$. C'est normal : chaque marche dessine un petit triangle de même forme que le grand triangle formé par tout l'escalier.

Réponse. a) 18 cm · b) 3,78 m · c) environ 66,7 %.

Correction de l'exercice 10 – Lire une carte

À l'échelle $\frac{1}{25\,000}$, 1 cm sur la carte représente 25 000 cm, soit 250 m.

a) $4{,}8 \times 25\,000 = 120\,000$ cm = 1200 m, donc les villages sont distants de

$$1{,}2 \text{ km}$$

Contrôle avec le repère : $4{,}8 \times 250 = 1200$ m.

b) 3 km = 300 000 cm, donc le chemin mesure $300\,000 \div 25\,000 = 12$ cm sur la carte. Avec le repère : $3000 \div 250 = 12$ cm.

Sur une carte au $\frac{1}{50\,000}$, le même chemin ne mesurerait que 6 cm : une échelle deux fois plus petite donne un dessin deux fois plus petit.

Réponse. a) 1,2 km · b) 12 cm.

Correction de l'exercice 11 – Une parcelle sur un plan

a) À l'échelle $\frac{1}{500}$, les longueurs réelles sont 500 fois plus grandes : $6 \times 500 = 3000$ cm = 30 m et $4 \times 500 = 2000$ cm = 20 m. La parcelle mesure 30 m sur 20 m.

b) Son aire réelle vaut $30 \times 20 = 600$ m².

c) Sur le plan, l'aire vaut $6 \times 4 = 24$ cm².

Contrôle : les aires sont dans le rapport $500^2 = 250\,000$, et

$$24 \times 250\,000 = 6\,000\,000 \text{ cm}^2 = 600 \text{ m}^2$$

puisque 1 m² = 10 000 cm². On retrouve bien l'aire du b).

Réponse. a) 30 m sur 20 m · b) 600 m² · c) 24 cm².

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Une maquette de bâtiment

a) La hauteur réelle vaut 900 cm ; à l’échelle $\frac{1}{20}$, la maquette mesure $900 \div 20 = 45$ cm de haut.

b) Les volumes sont divisés par $20^3 = 20 \times 20 \times 20 = 8000$:

$$8 \div 8000 = 0{,}001 \text{ m}^3$$

Comme 1 m³ vaut 1000 L, la maquette contient 1 L d’air.

Piège : diviser le volume par 20 seulement donnerait 0,4 m³, soit 400 L, absurde pour une maquette de 45 cm de haut. À retenir : longueurs divisées par 20, aires par 400, volumes par 8000.

Réponse. a) 45 cm · b) 1 litre.

Correction de l’exercice 13 – Un verre conique

a) La partie remplie du verre est un petit cône, réduction du cône entier. Le rapport est celui des hauteurs :

$$k = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

b) Dans une réduction de rapport k, les volumes sont multipliés par $k^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$. Le verre contient donc $\frac{8}{27} \times 270 = 8 \times 10 = 80$ mL.

Piège : croire que les deux tiers de la hauteur donnent les deux tiers du volume (180 mL). Le cône est bien plus étroit en bas : à 5 cm de hauteur, il ne contiendrait que $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 270 = 10$ mL.

Réponse. a) $k = \frac{2}{3}$ · b) 80 mL.

Correction de l’exercice 14 – Une photocopieuse

a) Un agrandissement à 141 % multiplie les longueurs par 1,41. La largeur devient

$$1{,}41 \times 21 \approx 29{,}6 \text{ cm}$$

c’est la largeur du format A3.

b) L’aire est multipliée par $1{,}41^2 = 1{,}9881$, soit environ 2 : la surface double. C’est la raison du réglage 141 %, puisque $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

c) Pour revenir au format initial, on divise par 1,41, c’est-à-dire qu’on multiplie par $\frac{1}{1{,}41} \approx 0{,}709$: il faut régler la photocopieuse sur environ 71 %.

Piège : régler sur 59 % en retranchant 41 points donnerait $29{,}6 \times 0{,}59 \approx 17{,}5$ cm. On inverse un coefficient, on ne retranche pas un pourcentage.

Réponse. a) environ 29,6 cm · b) environ ×2 · c) environ 71 %.

Correction de l’exercice 15 – Deux poteaux et un câble

On note h la hauteur du point de croisement et x sa distance horizontale au poteau de 6 m ; il est donc à $10 - x$ du poteau de 4 m.

Le câble qui part du sommet du poteau de 4 m descend jusqu’au pied du poteau de 6 m. Le point de croisement et le sommet de ce poteau forment avec ce pied une configuration

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

de Thalès (verticales parallèles) : $\frac{h}{4} = \frac{x}{10}$, donc $x = 2{,}5h$.

De même, avec le câble qui part du sommet du poteau de 6 m : $\frac{h}{6} = \frac{10 - x}{10}$. On remplace x par $2{,}5h$ et on fait le produit en croix :

$$10h = 6(10 - 2{,}5h) = 60 - 15h \quad \text{donc} \quad 25h = 60 \quad \text{et} \quad h = 2{,}4 \text{ m}$$

Le croisement est à $x = 6$ m du premier poteau. **Contrôle** : $\frac{2{,}4}{6} = 0{,}4 = \frac{4}{10}$ et $\frac{2{,}4}{4} = 0{,}6 = \frac{6}{10}$. Fait remarquable : la hauteur ne dépend pas de la distance entre les poteaux, car $\frac{1}{h} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$.

Réponse. À 2,4 m de hauteur, quelle que soit la distance entre les poteaux.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : le terrain de sport

a) À l’échelle $\frac{1}{400}$, les longueurs réelles sont 400 fois plus grandes : $25 \times 400 = 10\,000$ cm = 100 m et $12 \times 400 = 4800$ cm = 48 m.

b) L’aire réelle vaut $100 \times 48 = 4800$ m². Contrôle : l’aire sur le plan, 300 cm², multipliée par $400^2 = 160\,000$, donne $48\,000\,000$ cm², soit 4800 m².

c) La piste est à 3 m du bord de chaque côté : elle fait le tour d’un rectangle de 106 m sur 54 m, donc sa longueur vaut

$$2 \times (106 + 54) = 320 \text{ m}$$

Elle dépasse de 24 m le périmètre du terrain (296 m) : chacun des quatre côtés s’allonge de $2 \times 3 = 6$ m.

d) L’échelle $\frac{1}{200}$ est deux fois plus grande que $\frac{1}{400}$: le panneau mesure $25 \times 2 = 50$ cm sur $12 \times 2 = 24$ cm, et son aire est quatre fois celle du plan.

Réponse. a) 100 m sur 48 m · b) 4800 m² · c) 320 m · d) 50 cm sur 24 cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).