

Plaquette 5 – Mesures indirectes et problèmes concrets

Théorème de Thalès – Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Modéliser une mesure indirecte. On repère deux triangles semblables et on identifie le sommet commun.

Situation	Ce qui est parallèle
ombres au soleil	les rayons du soleil, et les deux objets verticaux
viseur ou mire	l'objet visé et la mire, tous deux verticaux
miroir posé au sol	les deux verticales, l'observateur et l'objet
projection	l'écran et l'objet projeté

Les deux règles de calcul.

$$\text{longueurs} \times k \quad \text{aires} \times k^2 \quad \text{volumes} \times k^3$$

Échelle d'un plan. Une échelle $\frac{1}{n}$ signifie que 1 cm sur le plan représente n cm en réalité.

Grandeur	Coefficient entre plan et réalité
longueur	n
aire	n^2
volume	n^3

Conversions utiles.

Égalité	Valeur
1 m	100 cm
1 m ²	10 000 cm ²
1 m ³	1000 L
1 km	100 000 cm

Contrôle de vraisemblance. Une hauteur d'arbre de 300 m ou une rivière de 2 cm signalent une erreur d'unité ou un rapport inversé. On vérifie toujours l'ordre de grandeur avant de conclure.

Rédiger. On nomme les points, on cite le parallélisme, on écrit les rapports, on calcule, puis on répond par une phrase avec l'unité.

Correction de l'exercice 1 – La hauteur d'un immeuble

- **Modélisation** : deux triangles rectangles semblables ✓
- **Raison** : les rayons du soleil sont parallèles ✓
- **Rapport hauteur sur ombre pour le bâton** : $\frac{1,6}{2}$ ✓
- **Valeur** : 0,8 ✓

- **Interprétation** : la hauteur vaut 0,8 fois l'ombre ✓
- **Équation pour l'immeuble** : $\frac{h}{35} = 0,8$ ✓
- **Calcul** : $h = 0,8 \times 35$ ✓
- **Résultat** :

$$h = 28 \text{ m}$$
- **Contrôle** : $\frac{28}{35} = 0,8$ ✓
- **Concordance avec le bâton** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : environ 9 étages ✓
- **Méthode par produit en croix** : $2h = 1,6 \times 35$ ✓
- **Calcul** : $2h = 56$ ✓
- **Résultat** : $h = 28 \text{ m}$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Condition de validité** : les deux mesures au même instant ✓
- **Effet d'une mesure faite plus tard** : les ombres s'allongent ✓
- **Conséquence** : le rapport changerait pour les deux objets ✓

Réponse. L'immeuble mesure 28 m.

Correction de l'exercice 2 - La largeur d'un lac

- **Égalité utile** : $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ ✓
- **Substitution** : $\frac{15}{60} = \frac{22}{BC}$ ✓
- **Simplification du premier rapport** : $\frac{1}{4}$ ✓
- **Produit en croix** : $BC = 4 \times 22$ ✓
- **Résultat** :

$$BC = 88 \text{ m}$$
- **Contrôle** : $\frac{22}{88} = 0,25$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : 88 m pour un lac est plausible ✓
- **Rapport de réduction** : 0,25 ✓
- **Interprétation** : le petit triangle est quatre fois plus petit ✓
- **Longueur MB** : $60 - 15$ ✓
- **Valeur** : 45 m ✓
- **Contrôle** : $\frac{45}{60} = 0,75$ ✓
- **Somme des deux rapports** : 1 ✓
- **Précision de la méthode** : elle dépend du repérage de M et N ✓
- **Effet d'une erreur de 1 m sur MN** : BC varie de 4 m ✓
- **Conseil** : mesurer MN aussi grand que possible ✓

Réponse. $BC = 88 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 3 - La profondeur d'un puits

- **Modélisation** : deux triangles semblables de part et d'autre du bord ✓
- **Petit triangle** : hauteur de l'œil et recul ✓

- **Rapport** : $\frac{1,6}{0,5}$ ✓
- **Valeur** : 3,2 ✓
- **Grand triangle** : profondeur et diamètre ✓
- **Égalité** : $\frac{p}{1,2} = 3,2$ ✓
- **Calcul** : $p = 3,2 \times 1,2$ ✓
- **Résultat** :
$$p = 3,84 \text{ m}$$
- **Contrôle** : $\frac{3,84}{1,2} = 3,2$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : environ 4 m, plausible ✓
- **Méthode par produit en croix** : $0,5p = 1,6 \times 1,2$ ✓
- **Calcul** : $0,5p = 1,92$ ✓
- **Résultat** : $p = 3,84 \text{ m}$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Effet d'un recul plus grand, 1 m** : rapport 1,6 ✓
- **Profondeur mesurée** : 1,92 m ✓
- **Interprétation** : on ne verrait plus le fond, mais la paroi ✓
- **Condition** : reculer suffisamment peu pour viser le fond ✓

Réponse. Le puits a une profondeur de 3,84 m.

Correction de l'exercice 4 - Le miroir au sol

- **Modélisation** : deux triangles rectangles semblables ✓
- **Raison** : les angles d'incidence et de réflexion sont égaux ✓
- **Premier triangle** : œil, pieds, miroir ✓
- **Rapport** : $\frac{1,65}{2,4}$ ✓
- **Valeur** : 0,6875 ✓
- **Second triangle** : sommet, pied du bâtiment, miroir ✓
- **Égalité** : $\frac{h}{9,6} = 0,6875$ ✓
- **Calcul** : $h = 0,6875 \times 9,6$ ✓
- **Résultat** :
$$h = 6,6 \text{ m}$$
- **Contrôle par produit en croix** : $2,4h = 1,65 \times 9,6$ ✓
- **Calcul** : $2,4h = 15,84$ ✓
- **Résultat** : $h = 6,6 \text{ m}$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : deux étages, plausible ✓
- **Rapport des distances au miroir** : $\frac{9,6}{2,4} = 4$ ✓
- **Interprétation** : le bâtiment est quatre fois plus haut que l'œil ✓
- **Contrôle** : $4 \times 1,65 = 6,6 \text{ m}$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Avantage de la méthode** : elle fonctionne sans soleil ✓

Réponse. Le bâtiment mesure 6,6 m.

Correction de l'exercice 5 – Un plan à l'échelle

a) **Conversion** : $4,8 \text{ m} = 480 \text{ cm}$ ✓

— **Longueur sur le plan** : $\frac{480}{200}$ ✓

— **Résultat** :

2,4 cm

b) **Longueur réelle** : 3×200 ✓

— **Valeur** : 600 cm ✓

— **Conversion** :

6 m

c) **Rapport des aires** : 200^2 ✓

— **Valeur** : 40 000 ✓

— **Conversion de l'aire réelle** : $24 \text{ m}^2 = 240\,000 \text{ cm}^2$ ✓

— **Aire sur le plan** : $\frac{240\,000}{40\,000}$ ✓

— **Résultat** :

6 cm²

— **Contrôle par les dimensions** : une pièce de 6 m sur 4 m ✓

— **Sur le plan** : 3 cm sur 2 cm ✓

— **Aire** : 6 cm² ✓

— **Concordance** ✓

— **Piège** : diviser l'aire par 200 ✓

— **Ce que cela donnerait** : 1200 cm², absurde ✓

— **Règle** : les aires se divisent par le **carré** de l'échelle ✓

Réponse. a) 2,4 cm · b) 6 m · c) 6 cm².

Correction de l'exercice 6 – Agrandir une photo

a) **Condition** : les deux rapports doivent être égaux ✓

— **Rapport des longueurs** : $\frac{36}{15}$ ✓

— **Valeur** : 2,4 ✓

— **Rapport des largeurs** : $\frac{24}{10}$ ✓

— **Valeur** : 2,4 ✓

— **Comparaison** : égaux ✓

— **Conclusion** :

l'agrandissement est possible

— **Contrôle par produit en croix** : $10 \times 36 = 360$ ✓

— **Et** : $15 \times 24 = 360$ ✓

b) **Rapport** :

$k = 2,4$

— **Interprétation** : toutes les longueurs sont multipliées par 2,4 ✓

c) **Rapport des aires** : k^2 ✓

— **Calcul** : $2,4^2$ ✓

— **Résultat** :

5,76

— **Aire initiale** : $10 \times 15 = 150 \text{ cm}^2$ ✓

— **Aire finale** : $24 \times 36 = 864 \text{ cm}^2$ ✓

— **Contrôle** : $\frac{864}{150} = 5,76$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Format** 13×18 : rapport $\frac{18}{15} = 1,2$ ✓

— **Et** : $\frac{13}{10} = 1,3$ ✓

— **Constat** : les rapports diffèrent ✓

— **Conséquence** : ce format déforme ou impose un recadrage ✓

Réponse. a) oui, les rapports coïncident · b) $k = 2,4$ · c) l'aire est multipliée par 5,76.

Correction de l'exercice 7 - Une projection

a) **Rapport** : $\frac{6}{1,5}$ ✓

— **Résultat** :

$k = 4$

b) **Taille sur l'écran** : $4 \times 2,4$ ✓

— **Résultat** :

9,6 cm

— **Contrôle par produit en croix** : $1,5t = 2,4 \times 6$ ✓

— **Calcul** : $1,5t = 14,4$ ✓

— **Résultat** : $t = 9,6 \text{ cm}$ ✓

— **Concordance** ✓

c) **Nouveau rapport** : $\frac{9}{1,5}$ ✓

— **Valeur** : 6 ✓

— **Nouvelle taille de l'image** : $6 \times 2,4$ ✓

— **Résultat** :

14,4 cm

— **Augmentation** : 4,8 cm ✓

— **Rapport des deux tailles** : $\frac{14,4}{9,6} = 1,5$ ✓

— **Contrôle** : $\frac{9}{6} = 1,5$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Effet sur l'aire de l'image** : multipliée par $1,5^2$ ✓

— **Valeur** : 2,25 ✓

— **Conséquence pratique** : l'image devient moins lumineuse ✓

— **Raison** : la même lumière est étalée sur plus de surface ✓

Réponse. a) $k = 4$ · b) 9,6 cm · c) l'image passe à 14,4 cm.

Correction de l'exercice 8 - La pente d'une route

a) **Signification de 6 %** : 6 m de dénivelé pour 100 m à l'horizontale ✓

— **Rapport** : 0,06 ✓

— **Dénivelé** : $0,06 \times 250$ ✓

— **Résultat** :

$$15 \text{ m}$$

— **Contrôle** : $\frac{15}{250} = 0,06$ ✓

b) **Équation** : $0,06d = 42$ ✓

— **On divise par 0,06** : $d = \frac{42}{0,06}$ ✓

— **Résultat** :

$$d = 700 \text{ m}$$

— **Contrôle** : $0,06 \times 700 = 42 \text{ m}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Contrôle mental** : 6 m pour 100 m, donc 42 m pour 700 m ✓

— **Longueur réelle de la route** : $\sqrt{700^2 + 42^2}$ ✓

— **Calcul** : $490\,000 + 1764 = 491\,764$ ✓

— **Valeur approchée** : $\approx 701,3 \text{ m}$ ✓

— **Écart avec la distance horizontale** : 1,3 m ✓

— **Interprétation** : pour une pente faible, les deux se confondent presque ✓

— **Pente de 10 % sur 250 m** : 25 m de dénivelé ✓

— **Pente d'un col de montagne** : souvent 8 à 10 % ✓

Réponse. a) 15 m · b) 700 m.

Correction de l'exercice 9 - Un escalier

a) **Hauteur totale en centimètres** : 252 cm ✓

— **Hauteur d'une marche** : $\frac{252}{14}$ ✓

— **Résultat** :

$$18 \text{ cm}$$

— **Contrôle de vraisemblance** : entre 16 et 19 cm, conforme aux normes ✓

b) **Longueur horizontale** : 14×27 ✓

— **Résultat** : 378 cm ✓

— **Conversion** :

$$3,78 \text{ m}$$

c) **Pente** : hauteur divisée par longueur horizontale ✓

— **Calcul** : $\frac{252}{378}$ ✓

— **Simplification par 126** : $\frac{2}{3}$ ✓

— **Valeur approchée** : $\approx 0,667$ ✓

— **En pourcentage** :

$$\approx 66,7 \%$$

- **Contrôle par marche** : $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Interprétation** : chaque triangle de marche est semblable à l'escalier entier ✓
- **Argument** : c'est une configuration de Thalès ✓
- **Longueur de la rampe** : $\sqrt{252^2 + 378^2}$ ✓
- **Calcul** : $63\,504 + 142\,884 = 206\,388$ ✓
- **Valeur approchée** : $\approx 454,3$ cm ✓
- **Soit** : environ 4,54 m ✓

Réponse. a) 18 cm · b) 3,78 m · c) environ 66,7 %.

Correction de l'exercice 10 - Lire une carte

- a) **Distance réelle en centimètres** : $4,8 \times 25\,000$ ✓
- **Calcul** : 120 000 cm ✓
- **Conversion en mètres** : 1200 m ✓
- **Conversion en kilomètres** :
1,2 km
- **Repère utile** : 1 cm sur la carte vaut 250 m ✓
- **Contrôle** : $4,8 \times 250 = 1200$ m ✓
- **Concordance** ✓
- b) **Distance réelle en centimètres** : 3 km = 300 000 cm ✓
- **Distance sur la carte** : $\frac{300\,000}{25\,000}$ ✓
- **Résultat** :
12 cm
- **Contrôle par le repère** : $\frac{3000}{250} = 12$ cm ✓
- **Concordance** ✓
- **Avec une carte au** $\frac{1}{50\,000}$: 1 cm vaut 500 m ✓
- **Même chemin** : 6 cm ✓
- **Interprétation** : une échelle deux fois plus petite donne un dessin deux fois plus petit ✓
- **Aire d'une forêt de 8 cm² sur la carte** : $8 \times 25\,000^2$ cm² ✓
- **Calcul** : 5 000 000 000 cm² ✓
- **Conversion** : 500 000 m², soit 0,5 km² ✓

Réponse. a) 1,2 km · b) 12 cm.

Correction de l'exercice 11 - Une parcelle sur un plan

- a) **Première dimension** : 6×500 ✓
- **Calcul** : 3000 cm ✓
- **Conversion** : 30 m ✓
- **Seconde dimension** : 4×500 ✓
- **Calcul** : 2000 cm ✓
- **Conversion** :

20 m

b) **Aire réelle** : $30 \times 20 \checkmark$

— **Résultat** :

$$600 \text{ m}^2$$

c) **Aire sur le plan** : $6 \times 4 \checkmark$

— **Résultat** :

$$24 \text{ cm}^2$$

— **Contrôle par le rapport des aires** : $500^2 = 250\,000 \checkmark$

— **Aire réelle en centimètres carrés** : $24 \times 250\,000 \checkmark$

— **Calcul** : $6\,000\,000 \text{ cm}^2 \checkmark$

— **Conversion** : $\frac{6\,000\,000}{10\,000} \checkmark$

— **Résultat** : $600 \text{ m}^2 \checkmark$

— **Concordance avec b)** $\checkmark$

— **Prix à 180 € le mètre carré** : $108\,000 \text{ €} \checkmark$

— **Périmètre réel** : $2 \times 50 = 100 \text{ m} \checkmark$

— **Périmètre sur le plan** : $20 \text{ cm} \checkmark$

— **Contrôle** : $\frac{10\,000}{500} = 20 \text{ cm} \checkmark$

Réponse. a) 30 m sur 20 m · b) 600 m^2 · c) 24 cm^2 .

Correction de l'exercice 12 - Une maquette de bâtiment

a) **Hauteur réelle en centimètres** : $900 \text{ cm} \checkmark$

— **Hauteur de la maquette** : $\frac{900}{20} \checkmark$

— **Résultat** :

$$45 \text{ cm}$$

— **Contrôle de vraisemblance** : une maquette de table $\checkmark$

b) **Rapport des volumes** : $20^3 \checkmark$

— **Calcul** : $8000 \checkmark$

— **Volume de la maquette** : $\frac{8}{8000} \checkmark$

— **Résultat** : $0,001 \text{ m}^3 \checkmark$

— **Conversion en litres** :

$$1 \text{ L}$$

— **Contrôle** : 1 m^3 vaut $1000 \text{ L} \checkmark$

— **Calcul** : $0,001 \times 1000 = 1 \text{ L} \checkmark$

— **Concordance** $\checkmark$

— **Piège** : diviser le volume par 20 $\checkmark$

— **Ce que cela donnerait** : $0,4 \text{ m}^3$, soit $400 \text{ L} \checkmark$

— **Absurdité** : une maquette de 45 cm ne contient pas 400 litres $\checkmark$

— **Aire de façade réelle de 40 m^2** : rapport 400 $\checkmark$

— **Aire sur la maquette** : $0,1 \text{ m}^2 \checkmark$

— **Conversion** : $1000 \text{ cm}^2 \checkmark$

— **Contrôle** : $0,1 \times 10\,000 = 1000 \checkmark$

Réponse. a) 45 cm · b) 1 litre.

Correction de l'exercice 13 - Un verre conique

a) **Rapport des hauteurs** : $\frac{10}{15}$ ✓

— **Simplification** :

$$k = \frac{2}{3}$$

— **Valeur approchée** : $\approx 0,667$ ✓

— **Justification** : la partie remplie est une réduction du cône entier ✓

b) **Rapport des volumes** : k^3 ✓

— **Calcul** : $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ ✓

— **Valeur** : $\frac{8}{27}$ ✓

— **Volume** : $\frac{8}{27} \times 270$ ✓

— **Simplification** : 8×10 ✓

— **Résultat** :

80 mL

— **Piège** : croire que les deux tiers de la hauteur donnent les deux tiers du volume ✓

— **Ce que cela donnerait** : 180 mL ✓

— **Écart** : 100 mL ✓

— **Explication** : le cône est bien plus étroit en bas ✓

— **Hauteur pour la moitié du volume** : $k^3 = 0,5$ ✓

— **Valeur de k** : $\approx 0,794$ ✓

— **Hauteur correspondante** : $\approx 11,9$ cm ✓

— **Interprétation** : il faut remplir presque aux quatre cinquièmes ✓

— **Volume à 5 cm** : $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 270$ ✓

— **Résultat** : 10 mL ✓

Réponse. a) $k = \frac{2}{3}$ · b) 80 mL.

Correction de l'exercice 14 - Une photocopieuse

a) **Coefficient** : 1,41 ✓

— **Nouvelle largeur** : $1,41 \times 21$ ✓

— **Résultat** :

$\approx 29,6$ cm

— **Remarque** : c'est la largeur du format A3 ✓

b) **Rapport des aires** : $1,41^2$ ✓

— **Calcul** : 1,9881 ✓

— **Valeur approchée** :

≈ 2

— **Interprétation** : l'aire est doublée ✓

— **Explication du choix de 141 %** : $\sqrt{2} \approx 1,414$ ✓

— **Propriété des formats A** : passer de A4 à A3 double la surface ✓

c) **Coefficient de retour** : $\frac{1}{1,41}$ ✓

— **Valeur approchée** : $\approx 0,709$ ✓

— **Réglage** :

$$\approx 71 \%$$

— **Contrôle** : $1,41 \times 0,709 \approx 1$ ✓

— **Vérification** : $29,6 \times 0,709 \approx 21$ cm ✓

— **Concordance** ✓

— **Piège** : régler à 59 % en retranchant 41 points ✓

— **Ce que cela donnerait** : $29,6 \times 0,59 \approx 17,5$ cm ✓

— **Erreur** : 3,5 cm de moins ✓

— **Règle** : on inverse un coefficient, on ne retranche pas un pourcentage ✓

Réponse. a) environ 29,6 cm · b) environ $\times 2$ · c) environ 71 %.

Correction de l'exercice 15 - Deux poteaux et un câble

— **Notations** : le point de croisement est à la hauteur h ✓

— **Notation de sa distance au premier poteau** : x ✓

— **Distance au second poteau** : $10 - x$ ✓

— **Premier triangle** : câble du sommet du poteau de 6 m au pied de l'autre ✓

— **Configuration de Thalès** : $\frac{h}{6} = \frac{10 - x}{10}$ ✓

— **Second triangle** : câble du sommet du poteau de 4 m ✓

— **Égalité** : $\frac{h}{4} = \frac{x}{10}$ ✓

— **De la seconde** : $x = 2,5h$ ✓

— **Report dans la première** : $\frac{h}{6} = \frac{10 - 2,5h}{10}$ ✓

— **Produit en croix** : $10h = 6(10 - 2,5h)$ ✓

— **Développement** : $10h = 60 - 15h$ ✓

— **Regroupement** : $25h = 60$ ✓

— **Résultat** :

$$h = 2,4 \text{ m}$$

— **Distance au premier poteau** : $2,5 \times 2,4 = 6$ m ✓

— **Distance au second** : 4 m ✓

— **Contrôle** : $6 + 4 = 10$ m ✓

— **Vérification de la première égalité** : $\frac{2,4}{6} = 0,4$ et $\frac{4}{10} = 0,4$ ✓

— **Vérification de la seconde** : $\frac{2,4}{4} = 0,6$ et $\frac{6}{10} = 0,6$ ✓

— **Remarque remarquable** : h ne dépend **pas** de la distance entre les poteaux ✓

— **Formule générale** : $\frac{1}{h} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$ ✓

— **Contrôle** : $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$, et $\frac{12}{5} = 2,4$ ✓

Réponse. À 2,4 m de hauteur, quelle que soit la distance entre les poteaux.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : le terrain de sport

a) **Longueur réelle** : 25×400 ✓

- **Calcul** : 10 000 cm ✓
- **Conversion** : 100 m ✓
- **Largeur réelle** : 12×400 ✓
- **Calcul** : 4800 cm ✓
- **Conversion** :

48 m

b) **Aire** : 100×48 ✓

- **Résultat** :

4800 m²

- **Contrôle par le rapport** : aire sur le plan $25 \times 12 = 300$ cm² ✓
- **Rapport des aires** : $400^2 = 160\,000$ ✓
- **Aire réelle** : $300 \times 160\,000 = 48\,000\,000$ cm² ✓
- **Conversion** : 4800 m² ✓
- **Concordance** ✓

c) **Dimensions extérieures de la piste** : $100 + 6$ et $48 + 6$ ✓

- **Longueur** : 106 m ✓
- **Largeur** : 54 m ✓
- **Demi-périmètre** : 160 m ✓
- **Périmètre** :

320 m

- **Contrôle** : le périmètre du terrain vaut 296 m ✓
- **Écart** : 24 m ✓
- **Vérification** : 4 côtés élargis de 3 m ajoutent $8 \times 3 = 24$ m ✓

d) **Rapport entre les deux échelles** : $\frac{400}{200} = 2$ ✓

- **Nouvelle longueur** : 25×2 ✓
- **Résultat** : 50 cm ✓
- **Nouvelle largeur** : 12×2 ✓
- **Résultat** :

24 cm

- **Contrôle direct** : $\frac{10\,000}{200} = 50$ cm ✓
- **Et** : $\frac{4800}{200} = 24$ cm ✓
- **Concordance** ✓
- **Aire du panneau** : $50 \times 24 = 1200$ cm² ✓
- **Rapport avec le plan** : $\frac{1200}{300} = 4$ ✓

Réponse. a) 100 m sur 48 m · b) 4800 m² · c) 320 m · d) 50 cm sur 24 cm.