

Plaquette 4 - La réciproque : prouver ou réfuter un parallélisme

Théorème de Thalès — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La réciproque. Si A, M, B sont alignés, A, N, C sont alignés, si M et N sont placés dans le même ordre que B et C à partir de A , et si

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

alors $(MN) \parallel (BC)$.

La contraposée. Si les deux rapports sont **différents**, les droites ne sont **pas** parallèles. C'est souvent la question posée.

Les trois temps de la rédaction.

Temps	Ce qu'on écrit
calculer	les deux rapports séparément, sous forme décimale ou irréductible
comparer	« les deux rapports sont égaux » ou « ils sont différents »
conclure	« d'après la réciproque de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$ »

La condition d'ordre est essentielle. Si M et N ne sont pas du même côté de A , l'égalité des rapports ne suffit pas.

Situation	Conclusion possible
rapports égaux et même ordre	droites parallèles
rapports égaux mais ordres opposés	on ne peut rien conclure
rapports différents	droites non parallèles

Ne pas confondre.

On connaît	On utilise
le parallélisme, on cherche une longueur	le théorème direct
les longueurs, on cherche le parallélisme	la réciproque

Cas particulier utile. Si M et N sont les **milieux** de $[AB]$ et $[AC]$, les deux rapports valent $\frac{1}{2}$: la réciproque donne immédiatement $(MN) \parallel (BC)$.

Correction de l'exercice 1 - Les droites sont-elles parallèles ?

- **Premier rapport** : $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{9} \checkmark$
- **Simplification** : $\frac{1}{3} \checkmark$
- **Forme décimale** : $\approx 0,333 \checkmark$
- **Second rapport** : $\frac{AN}{AC} = \frac{5}{15} \checkmark$
- **Simplification** : $\frac{1}{3} \checkmark$

- **Comparaison** : les deux rapports sont **égaux** ✓
- **Vérification de l'ordre** : M et N sont du même côté de A ✓
- **Conclusion** :

$$(MN) \parallel (BC)$$

- **Justification** : d'après la réciproque du théorème de Thalès ✓
- **Longueur MB** : $9 - 3 = 6$ cm ✓
- **Longueur NC** : $15 - 5 = 10$ cm ✓
- **Contrôle complémentaire** : $\frac{6}{9} = \frac{10}{15}$ ✓
- **Valeur commune** : $\frac{2}{3}$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Rapport de réduction** : $\frac{1}{3}$ ✓
- **Conséquence** : MN vaut le tiers de BC ✓
- **Si BC mesurait 21 cm** : $MN = 7$ cm ✓

Réponse. Oui : les deux rapports valent $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 2 - Non parallèles

- **Premier rapport** : $\frac{4}{10}$ ✓
- **Forme décimale** : 0,4 ✓
- **Second rapport** : $\frac{5}{14}$ ✓
- **Forme décimale** : $\approx 0,357$ ✓
- **Comparaison** : $0,4 \neq 0,357$ ✓
- **Conclusion** :

(MN) et (BC) ne sont pas parallèles

- **Justification** : si elles l'étaient, Thalès imposerait l'égalité des rapports ✓
- **Nature du raisonnement** : on utilise la contraposée ✓
- **Valeur de AC qui rendrait les droites parallèles** ✓
- **Équation** : $\frac{5}{AC} = 0,4$ ✓
- **Résultat** : $AC = 12,5$ cm ✓
- **Écart avec la valeur donnée** : 1,5 cm ✓
- **Valeur de AN qui conviendrait** : $0,4 \times 14$ ✓
- **Résultat** : 5,6 cm ✓
- **Écart avec la valeur donnée** : 0,6 cm ✓
- **Précaution de rédaction** : comparer des valeurs décimales exactes ✓
- **Piège** : arrondir trop tôt et croire à l'égalité ✓
- **Contrôle par produit en croix** : $4 \times 14 = 56$ et $10 \times 5 = 50$ ✓
- **Constat** : $56 \neq 50$, donc rapports différents ✓

Réponse. Non : $\frac{4}{10} = 0,4$ et $\frac{5}{14} \approx 0,357$.

Correction de l'exercice 3 - Avec des décimaux

- **Premier rapport** : $\frac{2,4}{6}$ ✓
- **Forme décimale** : 0,4 ✓
- **Second rapport** : $\frac{3,2}{8}$ ✓
- **Forme décimale** : 0,4 ✓
- **Comparaison** : les deux rapports sont égaux ✓
- **Vérification de l'ordre** : $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ ✓
- **Conclusion** :

$$(MN) \parallel (BC)$$

- **Justification** : réciproque du théorème de Thalès ✓
- **Contrôle par produit en croix** : $2,4 \times 8 = 19,2$ ✓
- **Et** : $6 \times 3,2 = 19,2$ ✓
- **Égalité confirmée** ✓
- **Avantage du produit en croix** : aucun arrondi ✓
- **Longueur MB** : $6 - 2,4 = 3,6$ cm ✓
- **Longueur NC** : $8 - 3,2 = 4,8$ cm ✓
- **Contrôle** : $\frac{3,6}{6} = 0,6$ ✓
- **Et** : $\frac{4,8}{8} = 0,6$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Rapport de réduction** : 0,4 ✓
- **Si BC = 12,5 cm** : $MN = 5$ cm ✓

Réponse. Oui : les deux rapports valent 0,4.

Correction de l'exercice 4 - Rédiger une démonstration

- **Étape 1, calcul du premier rapport** : $\frac{AM}{AB} = \frac{16}{24}$ ✓
- **Simplification par 8** : $\frac{2}{3}$ ✓
- **Valeur approchée** : $\approx 0,667$ ✓
- **Étape 2, calcul du second rapport** : $\frac{AN}{AC} = \frac{12}{18}$ ✓
- **Simplification par 6** : $\frac{2}{3}$ ✓
- **Étape 3, comparaison** : les deux rapports valent $\frac{2}{3}$ ✓
- **Étape 4, vérification de l'ordre** : $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ ✓
- **Conséquence** : M et N sont du même côté de A ✓
- **Étape 5, conclusion** :

$$(MN) \parallel (BC)$$

- **Formule de rédaction** : « d'après la réciproque du théorème de Thalès » ✓
- **Contrôle par produit en croix** : $16 \times 18 = 288$ ✓
- **Et** : $24 \times 12 = 288$ ✓
- **Égalité confirmée** ✓
- **Longueur MB** : $24 - 16 = 8$ cm ✓

- **Longueur NC** : $18 - 12 = 6$ cm ✓
- **Contrôle** : $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ ✓
- **Et** : $\frac{AM}{AN} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Erreur de rédaction fréquente** : invoquer le théorème direct ✓

Réponse. Les deux rapports valent $\frac{2}{3}$ et l'ordre est respecté : d'après la réciproque de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

Correction de l'exercice 5 - La condition d'ordre

- **Réponse** : non ✓
- **Rappel de la réciproque** : elle exige l'égalité des rapports ✓
- **Et aussi** : que les points soient dans le **même ordre** ✓
- **Situation décrite** : les ordres sont **opposés** ✓
- **Conséquence** : la réciproque ne s'applique pas ✓
- **Conclusion** :
on ne peut rien affirmer
- **Ce qui se passe géométriquement** : N est du mauvais côté de A ✓
- **Effet** : la droite (MN) « traverse » la figure ✓
- **Cas où la conclusion serait valable** : N ramené du côté de C ✓
- **Longueurs alors** : $AM = \frac{AB}{2}$ et $AN = \frac{AC}{2}$ ✓
- **Nature des points** : ce sont les **milieux** ✓
- **Théorème correspondant** : le théorème des milieux ✓
- **Énoncé** : la droite des milieux est parallèle au troisième côté ✓
- **Et** : elle en mesure la moitié ✓
- **Contrôle** : $k = \frac{1}{2}$, donc $MN = \frac{BC}{2}$ ✓
- **Leçon** : une condition d'ordre n'est jamais décorative ✓
- **En pratique** : on précise toujours « $M \in [AB]$ » dans la rédaction ✓

Réponse. Non : la réciproque exige aussi que les points soient dans le même ordre à partir de A .

Correction de l'exercice 6 - Avec MB et NC

- **Attention** : les données sont MB et NC , pas AB et AC ✓
- **Longueur AB** : $AM + MB$ ✓
- **Calcul** : $6 + 9$ ✓
- **Résultat** : 15 cm ✓
- **Longueur AC** : $AN + NC$ ✓
- **Calcul** : $8 + 12$ ✓
- **Résultat** : 20 cm ✓
- **Premier rapport** : $\frac{6}{15}$ ✓
- **Forme décimale** : $0,4$ ✓
- **Second rapport** : $\frac{8}{20}$ ✓
- **Forme décimale** : $0,4$ ✓

— **Comparaison** : égaux ✓

— **Conclusion** :

$$(MN) \parallel (BC)$$

— **Justification** : réciproque du théorème de Thalès ✓

— **Contrôle alternatif** : $\frac{AM}{MB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ✓

— **Et** : $\frac{AN}{NC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Prudence** : cette seconde égalité n'est pas l'énoncé officiel ✓

— **Conseil** : reconstituer AB et AC avant de conclure ✓

Réponse. Oui : $\frac{6}{15} = \frac{8}{20} = 0,4$.

Correction de l'exercice 7 - Trouver la bonne longueur

— **Rapport imposé** : $\frac{AM}{AB} = \frac{20}{35}$ ✓

— **Simplification par 5** : $\frac{4}{7}$ ✓

— **Valeur approchée** : $\approx 0,571$ ✓

— **Condition** : $\frac{AN}{AC} = \frac{4}{7}$ ✓

— **Substitution** : $\frac{AN}{28} = \frac{4}{7}$ ✓

— **Produit en croix** : $7 \times AN = 4 \times 28$ ✓

— **Calcul** : $7 \times AN = 112$ ✓

— **Résultat** :

$$AN = 16 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : $16 < 28$ ✓

— **Longueur NC** : $28 - 16$ ✓

— **Valeur** : 12 cm ✓

— **Longueur MB** : $35 - 20$ ✓

— **Valeur** : 15 cm ✓

— **Contrôle complémentaire** : $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ ✓

— **Et** : $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Interprétation** : N est aux quatre septièmes de $[AC]$ ✓

Réponse. $AN = 16 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 8 - En configuration papillon

— **Configuration** : papillon ✓

— **Premier rapport** : $\frac{AM}{AB} = \frac{18}{12}$ ✓

— **Simplification par 6** : $\frac{3}{2}$ ✓

— **Forme décimale** : 1,5 ✓

- **Second rapport** : $\frac{AN}{AC} = \frac{15}{10} \checkmark$
- **Simplification par 5** : $\frac{3}{2} \checkmark$
- **Comparaison** : égaux $\checkmark$
- **Vérification de l'ordre** : M et N sont du même côté de $A \checkmark$
- **Précision** : tous deux à l'opposé de B et $C \checkmark$
- **Conclusion** :

$$(BC) \parallel (MN)$$

- **Justification** : réciproque du théorème de Thalès $\checkmark$
- **Contrôle par produit en croix** : $18 \times 10 = 180 \checkmark$
- **Et** : $12 \times 15 = 180 \checkmark$
- **Égalité confirmée** $\checkmark$
- **Rapport d'agrandissement** : 1,5 $\checkmark$
- **Si** $BC = 8 \text{ cm}$: $MN = 12 \text{ cm} \checkmark$
- **Longueur** BM : $12 + 18 = 30 \text{ cm} \checkmark$
- **Longueur** CN : $10 + 15 = 25 \text{ cm} \checkmark$
- **Contrôle** : $\frac{30}{25} = 1,2 \checkmark$

Réponse. Oui : les deux rapports valent 1,5.

Correction de l'exercice 9 - Le théorème des milieux

a) **Définition du milieu** : $AM = \frac{AB}{2} \checkmark$

- **Premier rapport** : $\frac{AM}{AB} \checkmark$
- **Valeur** : $\frac{1}{2} \checkmark$
- **De même pour** N : $AN = \frac{AC}{2} \checkmark$
- **Second rapport** :

$$\frac{1}{2}$$

b) **Comparaison** : les deux rapports sont égaux $\checkmark$

- **Vérification de l'ordre** : $M \in [AB]$ et $N \in [AC] \checkmark$
- **Conclusion** :

$$(MN) \parallel (BC)$$

- **Nom de ce résultat** : le théorème des milieux $\checkmark$
- **Énoncé usuel** : la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième $\checkmark$

c) **Rapport de réduction** : $\frac{1}{2} \checkmark$

- **Longueur** MN : $\frac{1}{2} \times 14 \checkmark$
- **Résultat** :

$$MN = 7 \text{ cm}$$

- **Second volet du théorème** : $MN = \frac{BC}{2} \checkmark$
- **Concordance** $\checkmark$

- **Périmètre de AMN** : la moitié de celui de ABC ✓
 - **Aire de AMN** : le quart de celle de ABC ✓
 - **Contrôle** : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ✓
 - **Interprétation** : le triangle des milieux découpe ABC en quatre triangles égaux ✓
- Réponse.** a) $\frac{1}{2}$ chacun · b) $(MN) \parallel (BC)$ · c) $MN = 7$ cm.

Correction de l'exercice 10 - Deux droites à tester

a) **Premier rapport** : $\frac{AM}{AB} = \frac{8}{20}$ ✓

- **Forme décimale** : 0,4 ✓
- **Second rapport** : $\frac{AN}{AC} = \frac{12}{30}$ ✓
- **Forme décimale** : 0,4 ✓
- **Comparaison** : égaux ✓
- **Conclusion** :

$$(MN) \parallel (BC)$$

b) **Premier rapport** : $\frac{AP}{AB} = \frac{12}{20}$ ✓

- **Forme décimale** : 0,6 ✓
- **Second rapport** : $\frac{AQ}{AC} = \frac{20}{30}$ ✓
- **Forme décimale** : $\approx 0,667$ ✓
- **Comparaison** : $0,6 \neq 0,667$ ✓
- **Conclusion** :

$$(PQ) \text{ n'est pas parallèle à } (BC)$$

- **Contrôle par produit en croix** : $12 \times 30 = 360$ ✓
- **Et** : $20 \times 20 = 400$ ✓
- **Constat** : $360 \neq 400$ ✓
- **Valeur de AQ qui conviendrait** : $0,6 \times 30$ ✓
- **Résultat** : 18 cm ✓
- **Écart avec la valeur donnée** : 2 cm ✓
- **Conséquence** : (MN) et (PQ) ne sont pas parallèles entre elles ✓

Réponse. a) oui (0,4 des deux côtés) · b) non ($0,6 \neq \frac{2}{3}$).

Correction de l'exercice 11 - Une planche bien posée

- **Premier rapport** : $\frac{45}{120}$ ✓
- **Simplification par 15** : $\frac{3}{8}$ ✓
- **Forme décimale** : 0,375 ✓
- **Second rapport** : $\frac{54}{144}$ ✓
- **Simplification par 18** : $\frac{3}{8}$ ✓
- **Forme décimale** : 0,375 ✓
- **Comparaison** : égaux ✓
- **Conclusion** :

oui, la traverse sera parallèle au sol

- **Justification** : réciproque du théorème de Thalès ✓
- **Contrôle par produit en croix** : $45 \times 144 = 6480$ ✓
- **Et** : $120 \times 54 = 6480$ ✓
- **Égalité confirmée** ✓
- **Longueur de la traverse si la base mesure 96 cm** : $0,375 \times 96$ ✓
- **Résultat** : 36 cm ✓
- **Correction si AN valait 50 cm** : rapport $\approx 0,347$ ✓
- **Verdict** : la traverse serait de travers ✓
- **Longueur correcte de AN** : $0,375 \times 144 = 54$ cm ✓
- **Concordance avec l'énoncé** ✓
- **Conseil pratique** : marquer les deux montants avant de couper ✓

Réponse. Oui : les deux rapports valent 0,375.

Correction de l'exercice 12 - Un trapèze

- **Configuration** : papillon, A est le point d'intersection ✓
- **Alignements** : M, A, C d'une part, N, A, B de l'autre ✓
- **Premier rapport** : $\frac{AM}{AC} = \frac{6}{15}$ ✓
- **Forme décimale** : 0,4 ✓
- **Second rapport** : $\frac{AN}{AB} = \frac{8}{20}$ ✓
- **Forme décimale** : 0,4 ✓
- **Comparaison** : égaux ✓
- **Conclusion sur les droites** : $(MN) \parallel (BC)$ ✓
- **Justification** : réciproque du théorème de Thalès ✓
- **Conséquence pour le quadrilatère** :

oui, MNCB est un trapèze

- **Bases** : [MN] et [BC] ✓
- **Rapport des bases** : 0,4 ✓
- **Si** $BC = 25$: $MN = 10$ ✓
- **Contrôle par produit en croix** : $6 \times 20 = 120$ ✓
- **Et** : $15 \times 8 = 120$ ✓
- **Égalité confirmée** ✓
- **Cas particulier du parallélogramme** : si le rapport valait 1 ✓
- **Condition** : les diagonales se couperaient en leur milieu ✓
- **Ici** : ce n'est pas le cas, $0,4 \neq 1$ ✓

Réponse. Oui : $\frac{6}{15} = \frac{8}{20} = 0,4$, donc $(MN) \parallel (BC)$.

Correction de l'exercice 13 - Deux erreurs à repérer

- **Première erreur** : les rapports écrits ✓
- **Ce que dit la réciproque** : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ ✓
- **Ce qu'a écrit l'élève** : les rapports avec MB et NC ✓
- **Statut** : c'est une conséquence, pas l'énoncé ✓

- **Seconde erreur** : le théorème invoqué ✓
- **Ce qu'il faut citer** : la **réciroque** du théorème de Thalès ✓
- **Raison** : on part des longueurs pour conclure au parallélisme ✓
- **Le théorème direct** : il part du parallélisme ✓
- **Rédaction correcte** :
 « d'après la réciroque du théorème de Thalès »
- **Troisième point à ne pas oublier** : la condition d'ordre ✓
- **Formulation** : « $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ » ✓
- **Exemple numérique de contrôle** : $AM = 4$, $MB = 6$, $AN = 6$, $NC = 9$ ✓
- **Rapports de l'élève** : $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Rapports corrects** : $\frac{4}{10} = 0,4$ et $\frac{6}{15} = 0,4$ ✓
- **Constat** : les deux écritures donnent la même conclusion ✓
- **Mais** : seule la seconde est celle du théorème ✓
- **Conseil** : en contrôle, écrire l'énoncé officiel ✓

Réponse. Les rapports doivent comparer à AB et AC , et c'est la **réciroque** de Thalès qu'il faut citer.

Correction de l'exercice 14 - Compléter pour conclure

- a) **Rapport imposé** : $\frac{25}{45}$ ✓
- **Simplification par 5** : $\frac{5}{9}$ ✓
 - **Valeur approchée** : $\approx 0,556$ ✓
 - **Condition** : $\frac{AN}{36} = \frac{5}{9}$ ✓
 - **Produit en croix** : $9 \times AN = 5 \times 36$ ✓
 - **Calcul** : $9 \times AN = 180$ ✓
 - **Résultat** :
 $AN = 20$ cm
 - **Contrôle** : $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ ✓
- b) **Rapport obtenu** : $\frac{22}{36}$ ✓
- **Simplification par 2** : $\frac{11}{18}$ ✓
 - **Valeur approchée** : $\approx 0,611$ ✓
 - **Comparaison** : $0,611 \neq 0,556$ ✓
 - **Conclusion** :
 (MN) n'est pas parallèle à (BC)
 - **Écart avec la valeur correcte** : 2 cm ✓
 - **Position relative** : N est trop loin de A ✓
 - **Contrôle par produit en croix** : $25 \times 36 = 900$ ✓
 - **Et** : $45 \times 22 = 990$ ✓
 - **Constat** : $900 \neq 990$ ✓
 - **Valeur de AM qui conviendrait avec $AN = 22$** : $\frac{11}{18} \times 45$ ✓
 - **Résultat** : 27,5 cm ✓

— **Écart** : 2,5 cm ✓

Réponse. a) $AN = 20$ cm · b) les droites ne sont pas parallèles.

Correction de l'exercice 15 - Un cas limite

a) **Premier rapport** : $\frac{AM}{AB}$ ✓

— **Puisque** $AM = AB$: le rapport vaut 1 ✓

— **Second rapport** : $\frac{AN}{AC}$ ✓

— **Valeur** :

1

— **Comparaison** : les rapports sont égaux ✓

b) **Interprétation en configuration triangle** : $M = B$ et $N = C$ ✓

— **Conséquence** : la droite (MN) est la droite (BC) ✓

— **Conclusion** :

les droites sont confondues

— **Statut du parallélisme** : deux droites confondues sont parallèles ✓

— **Convention** : on parle de parallèles **confondues** ✓

— **Interprétation en configuration papillon** : M est le symétrique de B par rapport à A ✓

— **De même** : N est le symétrique de C ✓

— **Conclusion** : (MN) est l'image de (BC) par la symétrie de centre A ✓

— **Propriété** : une symétrie centrale transforme une droite en une parallèle ✓

— **Donc** : $(MN) \parallel (BC)$, et cette fois **distinctes** ✓

— **Longueur MN** : $k \times BC = BC$ ✓

— **Interprétation** : même longueur, direction opposée ✓

— **Nature de $BMCN$** : un parallélogramme ✓

— **Raison** : ses diagonales se coupent en leur milieu A ✓

Réponse. a) 1 · b) confondues en configuration triangle, parallèles distinctes en configuration papillon.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : trois vérifications

a) **Premier rapport** : $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ ✓

— **Second rapport** : $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ ✓

— **Comparaison** : égaux ✓

— **Conclusion** :

$(MN) \parallel (BC)$

b) **Longueur AB** : $5 + 7 = 12$ ✓

— **Longueur AC** : $6 + 8 = 14$ ✓

— **Premier rapport** : $\frac{5}{12}$ ✓

— **Valeur approchée** : $\approx 0,417$ ✓

— **Second rapport** : $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ ✓

— **Valeur approchée** : $\approx 0,429$ ✓

— **Comparaison** : différents ✓

— **Conclusion** :

pas parallèles

— **Contrôle par produit en croix** : $5 \times 14 = 70$ ✓

— **Et** : $12 \times 6 = 72$ ✓

— **Constat** : $70 \neq 72$ ✓

c) **Premier rapport** : $\frac{3,5}{8,4}$ ✓

— **Multiplication par 10** : $\frac{35}{84}$ ✓

— **Simplification par 7** : $\frac{5}{12}$ ✓

— **Second rapport** : $\frac{4,5}{10,8}$ ✓

— **Multiplication par 10** : $\frac{45}{108}$ ✓

— **Simplification par 9** : $\frac{5}{12}$ ✓

— **Comparaison** : égaux ✓

— **Conclusion** :

$(MN) \parallel (BC)$

— **Contrôle par produit en croix** : $3,5 \times 10,8 = 37,8$ ✓

— **Et** : $8,4 \times 4,5 = 37,8$ ✓

— **Égalité confirmée** ✓

— **Bilan** : deux cas sur trois donnent le parallélisme ✓

Réponse. a) oui · b) non · c) oui.