Plaquette 4 – La réciproque : prouver ou réfuter un parallélisme

Théorème de Thalès — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La réciproque. Si A, M, B sont alignés, A, N, C sont alignés, si M et N sont placés **dans le même ordre** que B et C à partir de A, et si

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

alors $(MN) \parallel (BC)$.

La contraposée. Si les deux rapports sont **différents**, les droites ne sont **pas** parallèles. C'est souvent la question posée.

Les trois temps de la rédaction.

Temps	Ce qu'on écrit
calculer	les deux rapports séparément, sous forme décimale ou irréductible
comparer	« les deux rapports sont égaux » ou « ils sont différents »
conclure	« d'après la réciproque de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$ »

La condition d'ordre est essentielle. Si M et N ne sont pas du même côté de A, l'égalité des rapports ne suffit pas.

Situation	Conclusion possible
rapports égaux et même ordre	droites parallèles
rapports égaux mais ordres opposés	on ne peut rien conclure
rapports différents	droites non parallèles

Ne pas confondre.

On connaît	On utilise
le parallélisme, on cherche une longueur	le théorème **direct**
les longueurs, on cherche le parallélisme	la **réciproque**

Cas particulier utile. Si M et N sont les **milieux** de $[AB]$ et $[AC]$, les deux rapports valent $\frac{1}{2}$: la réciproque donne immédiatement $(MN) \parallel (BC)$.

Correction de l'exercice 1 – Les droites sont-elles parallèles ?

On compare les deux rapports donnés par la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Les deux rapports sont égaux. De plus, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$: les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**.

Conséquence : le triangle AMN est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ de ABC ; par exemple, si

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

BC mesurait 21 cm, on aurait $MN = 7$ cm.

Réponse. Oui : les deux rapports valent $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 2 – Non parallèles

On calcule les deux rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$$

Les rapports sont différents. Or, si les droites (MN) et (BC) étaient parallèles, le théorème de Thalès imposerait leur égalité. Donc (MN) et (BC) **ne sont pas parallèles** (c'est la contraposée du théorème).

Méthode sûre : pour éviter les arrondis, on compare les produits en croix, $4 \times 14 = 56$ et $10 \times 5 = 50$; comme $56 \neq 50$, les rapports ne sont pas égaux. Pour que les droites soient parallèles, il aurait fallu $AN = 0{,}4 \times 14 = 5{,}6$ cm.

Réponse. Non : $\frac{4}{10} = 0{,}4$ et $\frac{5}{14} \approx 0{,}357$.

Correction de l'exercice 3 – Avec des décimaux

On calcule les deux rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{2{,}4}{6} = 0{,}4 \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{3{,}2}{8} = 0{,}4$$

Les rapports sont égaux, et $M \in [AB]$, $N \in [AC]$: les points sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

Contrôle sans arrondi par les produits en croix : $2{,}4 \times 8 = 19{,}2$ et $6 \times 3{,}2 = 19{,}2$. Le triangle AMN est une réduction de rapport $0{,}4$: si $BC = 12{,}5$ cm, alors $MN = 5$ cm.

Réponse. Oui : les deux rapports valent 0,4.

Correction de l'exercice 4 – Rédiger une démonstration

On rédige en quatre temps.

Les rapports. On calcule séparément

$$\frac{AM}{AB} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

(on a simplifié par 8, puis par 6). Les deux rapports sont égaux. Pour éviter toute erreur de simplification, on peut aussi comparer les produits en croix : $16 \times 18 = 288$ et $24 \times 12 = 288$.

L'ordre des points. $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$: les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre.

La conclusion. D'après la **réciproque** du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles. C'est bien la réciproque qu'il faut citer : on part des longueurs pour démontrer un parallélisme.

Réponse. Les deux rapports valent $\frac{2}{3}$ et l'ordre est respecté : d'après la réciproque de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

Correction de l'exercice 5 – La condition d'ordre

Non, on ne peut pas conclure. La réciproque du théorème de Thalès demande deux conditions : l'égalité des rapports, **et** des points alignés dans le même ordre à partir de A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Ici, M est du côté de B mais N est du côté opposé à C : la seconde condition n'est pas remplie, la réciproque ne s'applique pas.

Géométriquement, la droite (MN) traverse alors la figure et n'a aucune raison d'être parallèle à (BC).

Si l'on ramène N du côté de C, on a $AM = \frac{AB}{2}$ et $AN = \frac{AC}{2}$: M et N sont les milieux des côtés, et le théorème des milieux donne

$$(MN) \parallel (BC) \quad \text{et} \quad MN = \frac{BC}{2}$$

Réponse. Non : la réciproque exige aussi que les points soient dans le même ordre à partir de A.

Correction de l'exercice 6 – Avec MB et NC

Les données sont MB et NC, et non AB et AC : on reconstitue d'abord les côtés entiers. Comme $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$,

$$AB = 6 + 9 = 15 \text{ cm} \qquad AC = 8 + 12 = 20 \text{ cm}$$

On compare ensuite les rapports de la réciproque : $\frac{AM}{AB} = \frac{6}{15} = 0{,}4$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{8}{20} = 0{,}4$. Ils sont égaux, et les points sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

Remarque : on a aussi $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$, mais cette égalité n'est pas l'énoncé officiel ; il vaut mieux reconstituer AB et AC avant de conclure.

Réponse. Oui : $\frac{6}{15} = \frac{8}{20} = 0{,}4$.

Correction de l'exercice 7 – Trouver la bonne longueur

Pour que $(MN) \parallel (BC)$, le théorème de Thalès impose que les deux rapports soient égaux. Le rapport sur $[AB]$ est connu :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

(simplification par 5). Il faut donc $\frac{AN}{28} = \frac{4}{7}$, soit $7 \times AN = 4 \times 28 = 112$ et $AN = 16$ cm. On place N sur $[AC]$ à 16 cm de A, aux quatre septièmes du segment.

Contrôle : $\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$. Les parts restantes sont aussi égales : $\frac{MB}{AB} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ et $\frac{NC}{AC} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$.

Réponse. $AN = 16$ cm.

Correction de l'exercice 8 – En configuration papillon

C'est une configuration papillon : A est entre B et M, et entre C et N. On compare les rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

Ils sont égaux. De plus, les points sont dans le même ordre : M et N sont tous deux de l'autre côté de A par rapport à B et C. D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(BC) \parallel (MN)$.

Contrôle par les produits en croix : $18 \times 10 = 180$ et $12 \times 15 = 180$. Le triangle AMN est un agrandissement de rapport 1,5 : si $BC = 8$ cm, alors $MN = 12$ cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Oui : les deux rapports valent 1,5.

Correction de l’exercice 9 – Le théorème des milieux

a) M est le milieu de $[AB]$, donc $AM = \frac{AB}{2}$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$. De même, N est le milieu de $[AC]$, donc $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$.

b) Les deux rapports sont égaux et $M \in [AB]$, $N \in [AC]$. D’après la réciproque du théorème de Thalès,

$$(MN) \parallel (BC)$$

C’est le théorème des milieux : la droite qui passe par les milieux de deux côtés d’un triangle est parallèle au troisième côté.

c) Le triangle AMN est une réduction de rapport $\frac{1}{2}$ de ABC, donc $MN = \frac{1}{2} \times 14 = 7$ cm. Son aire est le quart de celle de ABC, puisque $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Réponse. a) $\frac{1}{2}$ chacun · b) $(MN) \parallel (BC)$ · c) $MN = 7$ cm.

Correction de l’exercice 10 – Deux droites à tester

a) On compare les rapports pour M et N :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{8}{20} = 0{,}4 \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{12}{30} = 0{,}4$$

Ils sont égaux et les points sont dans le même ordre : d’après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

b) Pour P et Q : $\frac{AP}{AB} = \frac{12}{20} = 0{,}6$ et $\frac{AQ}{AC} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$. Les rapports sont différents (produits en croix : $12 \times 30 = 360$ et $20 \times 20 = 400$). Si (PQ) était parallèle à (BC), le théorème de Thalès imposerait leur égalité : (PQ) n’est donc **pas** parallèle à (BC).

Pour qu’elle le soit, il faudrait $AQ = 0{,}6 \times 30 = 18$ cm.

Réponse. a) oui (0,4 des deux côtés) · b) non ($0{,}6 \neq \frac{2}{3}$).

Correction de l’exercice 11 – Une planche bien posée

Les deux montants se rejoignent en A : avec la traverse $[MN]$ et le sol $[BC]$, on reconnaît une configuration triangle. On compare les rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8} \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{54}{144} = \frac{3}{8}$$

(simplifications par 15 et par 18). Les rapports sont égaux, et M, N sont sur les montants entre A et le sol. D’après la réciproque du théorème de Thalès, la traverse sera **parallèle au sol**.

Contrôle par les produits en croix : $45 \times 144 = 6480$ et $120 \times 54 = 6480$. Si la base mesure 96 cm, la traverse mesurera $\frac{3}{8} \times 96 = 36$ cm.

Réponse. Oui : les deux rapports valent 0,375.

Correction de l’exercice 12 – Un trapèze

Les diagonales se coupent en A : les points M, A, C sont alignés, ainsi que N, A, B, avec A entre les deux points à chaque fois. C’est une configuration papillon pour les triangles

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

AMN et ACB. On compare les rapports :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{6}{15} = 0{,}4 \qquad \frac{AN}{AB} = \frac{8}{20} = 0{,}4$$

Ils sont égaux (produits en croix : $6 \times 20 = 120$ et $15 \times 8 = 120$). D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$: le quadrilatère $MNCB$ a deux côtés opposés parallèles, c'est un **trapèze** de bases $[MN]$ et $[BC]$.

Ses bases sont dans le rapport 0,4 : si $BC = 25$, alors $MN = 10$. Ce n'est pas un parallélogramme, car il faudrait un rapport égal à 1.

Réponse. Oui : $\frac{6}{15} = \frac{8}{20} = 0{,}4$, donc $(MN) \parallel (BC)$.

Correction de l'exercice 13 – Deux erreurs à repérer

Première erreur : les rapports. La réciproque du théorème de Thalès compare aux côtés entiers : il faut écrire $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. L'égalité $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ en est une conséquence, ce n'est pas l'énoncé à citer.

Seconde erreur : le théorème invoqué. On part des longueurs pour conclure au parallélisme : c'est la **réciproque** du théorème de Thalès qu'il faut citer, pas le théorème direct (qui part du parallélisme pour en déduire des longueurs).

Il ne faut pas oublier non plus la condition d'ordre, « $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ ». Par exemple, avec $AM = 4$, $MB = 6$, $AN = 6$, $NC = 9$, la rédaction correcte est :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \quad \text{et} \quad \frac{AN}{AC} = \frac{6}{15} = 0{,}4$$

donc, les points étant alignés dans le même ordre, $(MN) \parallel (BC)$ d'après la réciproque du théorème de Thalès.

Réponse. Les rapports doivent comparer à AB et AC, et c'est la **réciproque** de Thalès qu'il faut citer.

Correction de l'exercice 14 – Compléter pour conclure

a) Pour que $(MN) \parallel (BC)$, il faut que $\frac{AN}{AC}$ soit égal à

$$\frac{AM}{AB} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

On résout $\frac{AN}{36} = \frac{5}{9}$: le produit en croix donne $9 \times AN = 5 \times 36 = 180$, donc $AN = 20$ cm.

b) Avec $AN = 22$ cm, le rapport vaut $\frac{22}{36} = \frac{11}{18} \approx 0{,}611$, différent de $\frac{5}{9} \approx 0{,}556$ (produits en croix : $25 \times 36 = 900$ et $45 \times 22 = 990$). Si les droites étaient parallèles, les rapports seraient égaux : (MN) n'est donc **pas** parallèle à (BC). Le point N est trop loin de A, de 2 cm.

Réponse. a) $AN = 20$ cm · b) les droites ne sont pas parallèles.

Correction de l'exercice 15 – Un cas limite

a) Puisque $AM = AB$ et $AN = AC$, les deux rapports valent 1 :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = 1$$

b) Tout dépend de la position des points.

En configuration triangle, M est sur la demi-droite $[AB)$ à la distance AB de A : $M = B$, et de même $N = C$. La droite (MN) **est** la droite (BC) : les droites sont confondues (on dit

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

parfois parallèles confondues).

En configuration papillon, M est le symétrique de B par rapport à A, et N celui de C. La droite (MN) est l'image de (BC) par la symétrie de centre A, donc une parallèle **distincte**, avec $MN = BC$. Le quadrilatère $BCMN$ a ses diagonales qui se coupent en leur milieu A : c'est un parallélogramme.

Réponse. a) 1 · b) confondues en configuration triangle, parallèles distinctes en configuration papillon.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : trois vérifications

Dans chaque cas, on compare les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$; les points étant dans le même ordre, l'égalité permet de conclure par la réciproque du théorème de Thalès.

a) $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ et $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$: les rapports sont égaux, donc $(MN) \parallel (BC)$.

b) On reconstitue d'abord les côtés : $AB = 5 + 7 = 12$ et $AC = 6 + 8 = 14$. Alors $\frac{5}{12} \approx 0{,}417$ et $\frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$. Les produits en croix diffèrent ($5 \times 14 = 70$ et $12 \times 6 = 72$) : les droites ne sont **pas** parallèles, sinon le théorème de Thalès imposerait l'égalité.

c) On multiplie par 10 pour travailler avec des entiers :

$$\frac{3{,}5}{8{,}4} = \frac{35}{84} = \frac{5}{12} \qquad \frac{4{,}5}{10{,}8} = \frac{45}{108} = \frac{5}{12}$$

Les rapports sont égaux : $(MN) \parallel (BC)$.

Réponse. a) oui · b) non · c) oui.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).