Plaquette 3 – Calculer un angle

Trigonométrie (triangle rectangle) — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le principe. On calcule d'abord le rapport, puis on remonte à l'angle.

Ce qu'on connaît	Rapport	Touche
adjacent et hypoténuse	cosinus	arccos
opposé et hypoténuse	sinus	arcsin
opposé et adjacent	tangente	arctan

Sur la calculatrice. Les touches se notent souvent $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$, accessibles par la touche seconde fonction. La machine doit être en **degrés**.

Exemple type.

$$\cos\hat{B} = \frac{8}{10} = 0{,}8 \quad \text{donne} \quad \hat{B} = \arccos(0{,}8) \approx 36{,}9°$$

Contrôles de vraisemblance.

Observation	Conséquence
le rapport dépasse 1 pour un cosinus ou un sinus	erreur, ce n'est pas possible
la tangente vaut 1	l'angle vaut 45°
la tangente dépasse 1	l'angle dépasse 45°
l'angle trouvé dépasse 90°	erreur de saisie

Angles complémentaires. Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus ont pour somme 90° :

$$\hat{B} + \hat{C} = 90°$$

Une fois le premier trouvé, le second se déduit par soustraction — inutile de refaire un calcul trigonométrique.

Arrondis. On arrondit l'angle au dixième de degré, sauf indication contraire. On garde le rapport complet dans la calculatrice avant d'appliquer la touche inverse.

Correction de l'exercice 1 – Avec le cosinus

On connaît le côté adjacent à $\hat{B}$ ($AB = 12$) et l'hypoténuse ($BC = 20$) : on utilise le cosinus.

$$\cos\hat{B} = \frac{12}{20} = 0{,}6 \quad \text{donc} \quad \hat{B} \approx 53{,}1°$$

(avec la touche $\cos^{-1}$, ou « Arccos », de la calculatrice).

Contrôle : d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 20^2 - 12^2 = 256$, donc $AC = 16$ cm ; alors $\sin\hat{B} = \frac{16}{20} = 0{,}8$ redonne bien 53,1°. L'autre angle aigu mesure $90 - 53{,}1 = 36{,}9°$.

Réponse. $\hat{B} \approx 53{,}1°$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Avec le sinus

On connaît le côté opposé à $\hat{B}$ ($AC = 5$) et l'hypoténuse ($BC = 13$) : on utilise le sinus.

$$\sin\hat{B} = \frac{5}{13} \approx 0{,}3846 \quad \text{donc} \quad \hat{B} \approx 22{,}6°$$

(avec la touche $\sin^{-1}$ de la calculatrice).

Contrôle : le théorème de Pythagore donne $AB^2 = 169 - 25 = 144$, donc $AB = 12$ cm, et $\cos\hat{B} = \frac{12}{13}$ redonne 22,6°. L'angle $\hat{C}$ mesure $90 - 22{,}6 = 67{,}4°$.

Réponse. $\hat{B} \approx 22{,}6°$.

Correction de l'exercice 3 – Avec la tangente

On connaît les deux côtés de l'angle droit, mais pas l'hypoténuse : on utilise la tangente. Pour $\hat{B}$, le côté opposé est $AC = 15$ et le côté adjacent $AB = 8$:

$$\tan\hat{B} = \frac{15}{8} = 1{,}875 \quad \text{donc} \quad \hat{B} \approx 61{,}9°$$

La tangente dépasse 1, l'angle dépasse donc 45°, ce qui est cohérent. L'autre angle aigu est son complémentaire : $\hat{C} = 90 - 61{,}9 = 28{,}1°$.

Contrôle direct : $\tan\hat{C} = \frac{8}{15} \approx 0{,}533$, qui donne bien 28,1°.

Réponse. $\hat{B} \approx 61{,}9°$ et $\hat{C} \approx 28{,}1°$.

Correction de l'exercice 4 – Un rapport à simplifier

a) On connaît le côté adjacent à $\hat{B}$ et l'hypoténuse : cosinus.

$$\cos\hat{B} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \quad \text{donc} \quad \hat{B} \approx 53{,}1°$$

b) D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$, donc $AC = 12$ cm.

On vérifie avec un autre rapport : $\sin\hat{B} = \frac{12}{15} = 0{,}8$, qui redonne 53,1°, de même que $\tan\hat{B} = \frac{12}{9}$. Les côtés 9, 12, 15 sont ceux du triangle 3, 4, 5 multipliés par 3.

Réponse. a) $\hat{B} \approx 53{,}1° \cdot$ b) $AC = 12$ cm.

Correction de l'exercice 5 – Repérer une erreur

Le sinus d'un angle aigu est le quotient du côté opposé par l'hypoténuse. Or l'hypoténuse est le plus long côté du triangle rectangle : ce quotient est toujours **inférieur à** 1.

$$\sin\hat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} < 1$$

Obtenir 1,25 prouve une erreur : l'élève a inversé le quotient, en mettant l'hypoténuse au numérateur. Si $BC = 15$ est l'hypoténuse et $AC = 12$ le côté opposé, il fallait écrire $\sin\hat{B} = \frac{12}{15} = 0{,}8$, d'où $\hat{B} \approx 53{,}1°$. La calculatrice signale d'ailleurs une erreur pour $\sin^{-1}(1{,}25)$.

Réponse. Un sinus d'angle aigu ne dépasse jamais 1 : le rapport correct est $\frac{12}{15} = 0{,}8$, d'où $\approx 53{,}1°$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Angles complémentaires

a) La somme des angles d'un triangle vaut 180° ; l'angle droit en prend 90, donc les deux angles aigus sont complémentaires :

$$\hat{C} = 90 - 34 = 56°$$

b) $\cos 34° = \dfrac{AB}{BC}$: $[AB]$ est le côté adjacent à $\hat{B}$. Mais $[AB]$ est aussi le côté **opposé** à $\hat{C}$, donc $\sin 56° = \dfrac{AB}{BC}$. Les deux rapports sont les mêmes : $\cos 34° = \sin 56° \approx 0{,}829$.

C'est un cas de la règle générale : le cosinus d'un angle aigu est égal au sinus de son complémentaire ($\cos 30° = \sin 60°$, par exemple).

Réponse. a) $\hat{C} = 56°$ · b) $\cos 34° = \sin 56°$.

Correction de l'exercice 7 – Pythagore puis l'angle

a) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle en A :

$$BC^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 \quad \text{donc} \quad BC = 25 \text{ cm}$$

b) **Avec la tangente**, qui n'utilise que les données : $\tan \hat{B} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{24}{7}$, d'où $\hat{B} \approx 73{,}7°$.

Avec le sinus, qui utilise le résultat du a) : $\sin \hat{B} = \dfrac{24}{25} = 0{,}96$, d'où aussi $\hat{B} \approx 73{,}7°$.

Les deux méthodes concordent, ce qui confirme $BC = 25$. L'autre angle aigu mesure $90 - 73{,}7 = 16{,}3°$.

Réponse. a) $BC = 25$ cm · b) $\hat{B} \approx 73{,}7°$.

Correction de l'exercice 8 – La pente d'un toit

a) Le toit, la hauteur et la distance horizontale forment un triangle rectangle. Pour l'angle α avec l'horizontale, la hauteur (1,5 m) est le côté opposé et la distance horizontale (4,2 m) le côté adjacent : on utilise la tangente.

$$\tan \alpha = \frac{1{,}5}{4{,}2} \approx 0{,}357 \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 19{,}7°$$

b) Le versant est l'hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore, $v^2 = 1{,}5^2 + 4{,}2^2 = 2{,}25 + 17{,}64 = 19{,}89$, d'où $v \approx 4{,}46$ m.

Contrôle avec le cosinus : $\dfrac{4{,}2}{\cos 19{,}7°} \approx 4{,}46$ m.

Réponse. a) $\alpha \approx 19{,}7°$ · b) $v \approx 4{,}46$ m.

Correction de l'exercice 9 – L'angle d'une rampe

a) La rampe est l'hypoténuse (6 m) et la hauteur franchie (0,5 m) le côté opposé à l'angle α : on utilise le sinus.

$$\sin \alpha = \frac{0{,}5}{6} \approx 0{,}0833 \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 4{,}8°$$

b) La pente se mesure sur la longueur **horizontale**. D'après le théorème de Pythagore, celle-ci vaut $\sqrt{6^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{35{,}75} \approx 5{,}98$ m. La pente vaut donc $\dfrac{0{,}5}{5{,}98} \approx 0{,}084$, soit environ 8,4 %.

C'est plus que 5 % : la rampe ne respecte **pas** la norme. Pour monter de 0,5 m à 5 %, il faudrait $0{,}5 \div 0{,}05 = 10$ m à l'horizontale.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $\alpha \approx 4{,}8°$ · b) non : la pente vaut environ 8,4 %.

Correction de l'exercice 10 – Deux angles d'un rectangle

a) La diagonale partage le rectangle en deux triangles rectangles de côtés 12 cm et 5 cm. D'après le théorème de Pythagore,

$$d^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \quad \text{donc} \quad d = 13 \text{ cm}$$

b) Pour l'angle α entre la diagonale et le grand côté, le côté de 12 cm est adjacent et celui de 5 cm est opposé :

$\tan\alpha = \dfrac{5}{12} \approx 0{,}417$, d'où $\alpha \approx 22{,}6°$.

Contrôle avec le cosinus : $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ redonne 22,6°. L'angle entre la diagonale et le petit côté mesure $90 - 22{,}6 = 67{,}4°$.

Réponse. a) 13 cm · b) $\approx 22{,}6°$.

Correction de l'exercice 11 – L'angle d'élévation

a) L'observateur, le pied et le sommet de la tour forment un triangle rectangle au pied de la tour. Pour l'angle d'élévation α, la hauteur (45 m) est le côté opposé et la distance au sol (80 m) le côté adjacent :

$$\tan\alpha = \frac{45}{80} = 0{,}5625 \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 29{,}4°$$

b) La distance au sommet est l'hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore, $D^2 = 80^2 + 45^2 = 6400 + 2025 = 8425$, d'où $D \approx 91{,}79$ m.

Remarque : en reculant à 160 m, on aurait $\tan\alpha = 0{,}281$ et $\alpha \approx 15{,}7°$: l'angle n'est pas divisé par deux, car la tangente n'est pas proportionnelle à l'angle.

Réponse. a) $\approx 29{,}4°$ · b) $\approx 91{,}79$ m.

Correction de l'exercice 12 – Comparer deux pentes

a) Pour chaque piste, le dénivelé est le côté opposé à l'angle et la distance horizontale le côté adjacent : on utilise la tangente.

$$\tan\alpha_A = \frac{220}{800} = 0{,}275 \quad \text{donc} \quad \alpha_A \approx 15{,}4°$$

$\tan\alpha_B = \dfrac{150}{500} = 0{,}3$, d'où $\alpha_B \approx 16{,}7°$.

b) La piste **B** est la plus raide, même si son dénivelé est plus petit. Il suffisait d'ailleurs de comparer les tangentes ($0{,}3 > 0{,}275$), car la tangente augmente avec l'angle : les pentes valent 27,5 % pour A et 30 % pour B.

Piège : comparer les dénivelés seuls ($220 > 150$) ne tient pas compte des distances horizontales.

Réponse. a) $\approx 15{,}4°$ et $\approx 16{,}7°$ · b) la piste B.

Correction de l'exercice 13 – Un triangle isocèle

a) Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet coupe la base en son milieu : on obtient deux triangles rectangles de côtés 5 cm (demi-base) et 12 cm (hauteur). Pour un angle à la base β, la hauteur est le côté opposé et la demi-base le côté adjacent :

$$\tan\beta = \frac{12}{5} = 2{,}4 \quad \text{donc} \quad \beta \approx 67{,}4°$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Les deux angles à la base sont égaux.

b) L'angle au sommet vaut $180 - 2 \times 67{,}4 \approx 45{,}2°$. Chaque côté égal est l'hypoténuse d'un des triangles rectangles : $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm. **Contrôle** : $\cos\beta = \frac{5}{13}$ redonne $67{,}4°$.

Réponse. a) $\approx 67{,}4°$ · b) angle au sommet $\approx 45{,}2°$, côtés de 13 cm.

Correction de l'exercice 14 – Retrouver un angle exact

On reconnaît les valeurs remarquables, à connaître par cœur :

Angle	cos	sin	tan
$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

a) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$: $\alpha = 60°$.

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\alpha = 45°$.

c) $\tan\alpha = 1$: $\alpha = 45°$ (le côté opposé et le côté adjacent sont égaux).

d) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$: $\alpha = 30°$.

On remarque que $\cos 60° = \sin 30°$:

$$60° + 30° = 90°$$

les deux angles sont complémentaires.

Réponse. a) $60°$ · b) $45°$ · c) $45°$ · d) $30°$.

Correction de l'exercice 15 – Un cerf-volant

a) Le fil tendu est l'hypoténuse (60 m) et la hauteur du cerf-volant (48 m) le côté opposé à l'angle α avec l'horizontale : on utilise le sinus.

$$\sin\alpha = \frac{48}{60} = 0{,}8 \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 53{,}1°$$

b) La distance horizontale est le troisième côté. D'après le théorème de Pythagore, $d^2 = 60^2 - 48^2 = 3600 - 2304 = 1296$, donc $d = 36$ m.

Les longueurs 36, 48, 60 sont celles du triangle 3, 4, 5 multipliées par 12. **Contrôle** : $60 \times \cos 53{,}1° \approx 36{,}0$ m.

Réponse. a) $\approx 53{,}1°$ · b) 36 m.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : quatre angles

Pour l'angle $\hat{B}$, on choisit le rapport qui relie les deux côtés connus.

a) Côté adjacent et hypoténuse : $\cos\hat{B} = \frac{6}{10} = 0{,}6$, d'où $\hat{B} \approx 53{,}1°$.

b) Côté opposé et hypoténuse : $\sin\hat{B} = \frac{9}{15} = 0{,}6$, d'où $\hat{B} \approx 36{,}9°$. Le quotient vaut aussi 0,6, mais ce n'est pas le même rapport : l'angle est le complémentaire du précédent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Côté opposé et côté adjacent : $\tan\hat{B} = \dfrac{7}{4} = 1{,}75$, d'où $\hat{B} \approx 60{,}3°$.

d) Les deux côtés de l'angle droit sont égaux :

$$\tan\hat{B} = \frac{20}{20} = 1 \quad \text{donc} \quad \hat{B} = 45°$$

exactement : le triangle est rectangle isocèle.

Réponse. a) $\approx 53{,}1°$ · b) $\approx 36{,}9°$ · c) $\approx 60{,}3°$ · d) $45°$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).