Plaquette 1 – Choisir le bon rapport et calculer

Trigonométrie (triangle rectangle) — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu $\hat{B}$:

$$\cos\hat{B} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \sin\hat{B} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \tan\hat{B} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

— Mnémotechnique : **CAH – SOH – TOA**.

— L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit, toujours le plus long.

— Pour trouver un angle connaissant un rapport, on utilise les touches arccos, arcsin, arctan (calculatrice **en degrés**).

— Théorème de Pythagore (pour compléter un côté manquant) : dans un triangle rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

— Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont **complémentaires** : leur somme vaut 90°.

— Un cosinus ou un sinus d'angle aigu est toujours strictement compris entre 0 et 1 ; une tangente peut dépasser 1.

Correction de l'exercice 1 – Nommer les côtés

— L'angle droit est en S, donc l'hypoténuse est le côté qui ne touche pas S : c'est $[RT]$.

— Le côté **adjacent** à $\hat{R}$ (autre que l'hypoténuse) est $[RS]$.

— Le côté **opposé** à $\hat{R}$ est $[ST]$.

$$\cos\hat{R} = \frac{RS}{RT} \qquad \sin\hat{R} = \frac{ST}{RT} \qquad \tan\hat{R} = \frac{ST}{RS}$$

Réponse. Hypoténuse $[RT]$, adjacent $[RS]$, opposé $[ST]$.

Correction de l'exercice 2 – Calculer un côté avec le cosinus

— Pour $\hat{B}$: $[AB]$ est le côté adjacent et $[BC]$ l'hypoténuse. On utilise donc le cosinus.

$$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow AB = BC \times \cos\hat{B}$$

— $AB = 8 \times \cos 40° \approx 8 \times 0{,}766 \approx 6{,}13$ cm, soit 6,1 cm.

— Vraisemblance : AB doit être plus petit que l'hypoténuse 8 cm. C'est le cas.

Réponse. $AB \approx 6{,}1$ cm.

Correction de l'exercice 3 – Calculer un côté avec le sinus

— Pour $\hat{E}$: $[DF]$ est le côté **opposé** et $[EF]$ l'hypoténuse : c'est le sinus.

$$\sin\hat{E} = \frac{DF}{EF} \Longrightarrow DF = EF \times \sin\hat{E}$$

— $DF = 11 \times \sin 28° \approx 11 \times 0{,}469 \approx 5{,}16$ cm, soit 5,2 cm.

Réponse. $DF \approx 5{,}2$ cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 4 – Calculer un côté avec la tangente

— On connaît le côté adjacent à $\hat{B}$ et on cherche le côté opposé : ni l'un ni l'autre n'est l'hypoténuse, c'est donc la tangente.

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} \Longrightarrow AC = AB \times \tan\hat{B}$$

— $AC = 7 \times \tan 55° \approx 7 \times 1{,}428 \approx 10{,}0$ cm.

— Remarque : $\tan 55° > 1$, donc le côté opposé est plus grand que le côté adjacent. Cohérent avec un angle supérieur à 45°.

Réponse. $AC \approx 10{,}0$ cm.

Correction de l'exercice 5 – Trouver l'hypoténuse

— $[MN]$ est adjacent à $\hat{N}$, et $[NP]$ est l'hypoténuse cherchée : cosinus.

$$\cos\hat{N} = \frac{MN}{NP} \Longrightarrow NP = \frac{MN}{\cos\hat{N}}$$

— $NP = \dfrac{6}{\cos 35°} \approx \dfrac{6}{0{,}819} \approx 7{,}32$ cm, soit 7,3 cm.

Piège. Ici l'inconnue est au **dénominateur** : on divise par le cosinus au lieu de multiplier. Contrôle de vraisemblance : l'hypoténuse doit être plus grande que 6 cm.

Réponse. $NP \approx 7{,}3$ cm.

Correction de l'exercice 6 – Calculer un angle

— Adjacent et hypoténuse connus : cosinus.

$$\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{9} \approx 0{,}556$$

— Avec la touche arccos (calculatrice en degrés) : $\hat{B} = \arccos\left(\dfrac{5}{9}\right) \approx 56{,}3°$, soit 56° au degré près.

— Contrôle : $\cos 60° = 0{,}5$ et $\cos 45° \approx 0{,}707$: l'angle est entre 45° et 60°, plus près de 60°. Cohérent.

Réponse. $\hat{B} \approx 56°$.

Correction de l'exercice 7 – Pythagore puis trigonométrie

a) Théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100$, donc $BC = 10$ cm.

b) On peut utiliser la tangente (les deux côtés de l'angle droit sont connus) :

— $\tan\hat{B} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{6}{8} = 0{,}75$, donc $\hat{B} = \arctan(0{,}75) \approx 36{,}9°$, soit 37°.

c) Les deux angles aigus sont complémentaires :

$$\hat{C} = 90° - \hat{B} \approx 90 - 36{,}9 = 53{,}1°$$

— Soit environ 53°. Contrôle : $\cos\hat{C} = \dfrac{AC}{BC} = 0{,}6$ et $\arccos(0{,}6) \approx 53{,}1°$. Cohérent.

Réponse. a) $BC = 10$ cm · b) $\hat{B} \approx 37°$ · c) $\hat{C} \approx 53°$.

Correction de l'exercice 8 – Problème : une rampe de skate

La rampe est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, l'angle au sol vaut 18°.

a) La hauteur est le côté **opposé** à l'angle : sinus.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$h = 4 \times \sin 18° \approx 4 \times 0{,}309 \approx 1{,}24 \text{ m}$$

b) La longueur au sol est le côté **adjacent** : cosinus.

$$d = 4 \times \cos 18° \approx 4 \times 0{,}951 \approx 3{,}80 \text{ m}$$

— Contrôle par Pythagore : $1{,}24^2 + 3{,}80^2 \approx 1{,}54 + 14{,}44 = 15{,}98 \approx 4^2$. Cohérent.

Réponse. a) $h \approx 1{,}24$ m · b) $d \approx 3{,}80$ m.

Correction de l'exercice 9 – Problème : un toit

Par symétrie, on considère la moitié du toit : un triangle rectangle dont la base mesure $\frac{6}{2} = 3$ m et la hauteur 1,80 m.

— L'angle α cherché a pour côté adjacent la base (3 m) et pour côté opposé la hauteur (1,80 m) : c'est la tangente.

$$\tan \alpha = \frac{1{,}80}{3} = 0{,}6$$

— Donc $\alpha = \arctan(0{,}6) \approx 31{,}0°$.

— Contrôle : une pente de 60 % correspond bien à un angle d'environ 31° (un angle de 45° correspondrait à une pente de 100 %).

Réponse. $\alpha \approx 31{,}0°$.

Correction de l'exercice 10 – Angles complémentaires

a) Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires : le second mesure $90 - 37 = 53°$.

b) $\cos 37° \approx 0{,}799$ et $\sin 53° \approx 0{,}799$: les deux valeurs sont égales.

c) Explication : dans le triangle rectangle en A, le côté $[AB]$ est **adjacent** à $\hat{B}$ mais **opposé** à $\hat{C}$. Donc

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \sin \hat{C}$$

— Comme $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires, on obtient la propriété générale $\cos x = \sin(90° - x)$.

Réponse. a) 53° · b) ≈ 0,799 pour les deux · c) $\cos x = \sin(90° - x)$.

Correction de l'exercice 11 – Calculer un côté de l'angle droit

Pour l'angle $\hat{K}$, le côté $[KL]$ est **adjacent** et le côté $[LM]$ est **opposé** ; l'hypoténuse $[KM]$ n'intervient pas : on utilise la tangente.

$$\tan 32° = \frac{LM}{KL} = \frac{LM}{9} \quad \text{donc} \quad LM = 9 \times \tan 32° \approx 5{,}6 \text{ cm}$$

Contrôle de vraisemblance : l'angle est inférieur à 45°, donc le côté opposé est plus court que le côté adjacent, ce que l'on constate : $5{,}6 < 9$.

Réponse. $LM \approx 5{,}6$ cm.

Correction de l'exercice 12 – Un angle avec la tangente

On connaît les deux côtés de l'angle droit. Pour l'angle $\hat{F}$, $[EF]$ est le côté adjacent et $[EG]$ le côté opposé : on utilise la tangente.

$$\tan \hat{F} = \frac{EG}{EF} = \frac{4}{6} \approx 0{,}667$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

La touche $\tan^{-1}$ de la calculatrice donne $\hat{F} \approx 33{,}7°$, soit 34° au degré près.

Contrôle : la tangente est inférieure à 1, donc l'angle est inférieur à 45°. L'autre angle aigu mesure environ $90 - 33{,}7 = 56{,}3°$.

Réponse. $\hat{F} \approx 34°$.

Correction de l'exercice 13 – Problème : la longueur d'un toboggan

La glissière, la hauteur et le sol forment un triangle rectangle. La hauteur (2,5 m) est le côté **opposé** à l'angle de 30°, et la glissière est l'**hypoténuse** : on utilise le sinus, avec l'inconnue au dénominateur.

$$\sin 30° = \frac{2{,}5}{L} \quad \text{donc} \quad L = \frac{2{,}5}{\sin 30°} = \frac{2{,}5}{0{,}5} = 5 \text{ m}$$

Le résultat est exact, car $\sin 30° = \frac{1}{2}$: dans un triangle rectangle ayant un angle de 30°, le côté opposé à cet angle mesure la moitié de l'hypoténuse.

Réponse. La glissière mesure 5 m.

Correction de l'exercice 14 – Valeurs exactes avec un angle de 60°

Pour l'angle $\hat{B}$, l'hypoténuse est $[BC]$, le côté adjacent $[AB]$ et le côté opposé $[AC]$.

Cosinus : $AB = 10 \times \cos 60° = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ cm, valeur exacte.

Sinus :

$$AC = 10 \times \sin 60° = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}7 \text{ cm}$$

Contrôle par le théorème de Pythagore : $5^2 + (5\sqrt{3})^2 = 25 + 75 = 100 = 10^2$.

Réponse. $AB = 5$ cm et $AC = 5\sqrt{3} \approx 8{,}7$ cm.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : quatre calculs

a) Adjacent connu, opposé cherché : tangente. $AC = 9 \times \tan 42° \approx 9 \times 0{,}900 \approx 8{,}1$ cm.

b) $[AC]$ est opposé à $\hat{B}$, $[BC]$ est l'hypoténuse : sinus. $\sin \hat{B} = \frac{9}{14} \approx 0{,}643$, donc $\hat{B} \approx 40°$.

c) Opposé connu, hypoténuse cherchée : sinus. $BC = \frac{AC}{\sin 33°} \approx \frac{5}{0{,}545} \approx 9{,}2$ cm.

d) Les deux côtés de l'angle droit sont égaux : le triangle est rectangle **isocèle**, donc ses deux angles aigus sont égaux et valent $\frac{90}{2} = 45°$. (Contrôle : $\tan \hat{B} = \frac{4}{4} = 1$ et $\arctan 1 = 45°$.)

Réponse. a) $AC \approx 8{,}1$ cm · b) $\hat{B} \approx 40°$ · c) $BC \approx 9{,}2$ cm · d) 45°.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).