

Plaquette 1 - Choisir le bon rapport et calculer

Trigonométrie (triangle rectangle) — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu $\hat{B}$:

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \sin \hat{B} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad \tan \hat{B} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

- Mnémotechnique : **CAH - SOH - TOA**.
- L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit, toujours le plus long.
- Pour trouver un angle connaissant un rapport, on utilise les touches arccos, arcsin, arctan (calculatrice **en degrés**).
- Théorème de Pythagore (pour compléter un côté manquant) : dans un triangle rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont **complémentaires** : leur somme vaut 90° .
- Un cosinus ou un sinus d'angle aigu est toujours strictement compris entre 0 et 1 ; une tangente peut dépasser 1.

Correction de l'exercice 1 - Nommer les côtés

- L'angle droit est en S, donc l'hypoténuse est le côté qui ne touche pas S : c'est [RT].
- Le côté **adjacent** à $\hat{R}$ (autre que l'hypoténuse) est [RS].
- Le côté **opposé** à $\hat{R}$ est [ST].

$$\cos \hat{R} = \frac{RS}{RT} \quad \sin \hat{R} = \frac{ST}{RT} \quad \tan \hat{R} = \frac{ST}{RS}$$

Réponse. Hypoténuse [RT], adjacent [RS], opposé [ST].

Correction de l'exercice 2 - Calculer un côté avec le cosinus

- Pour $\hat{B}$: [AB] est le côté adjacent et [BC] l'hypoténuse. On utilise donc le cosinus.

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \times \cos \hat{B}$$

- $AB = 8 \times \cos 40^\circ \approx 8 \times 0,766 \approx 6,13$ cm, soit 6,1 cm.
- Vraisemblance : AB doit être plus petit que l'hypoténuse 8 cm. C'est le cas.

Réponse. $AB \approx 6,1$ cm.

Correction de l'exercice 3 - Calculer un côté avec le sinus

- Pour $\hat{E}$: [DF] est le côté **opposé** et [EF] l'hypoténuse : c'est le sinus.

$$\sin \hat{E} = \frac{DF}{EF} \Rightarrow DF = EF \times \sin \hat{E}$$

- $DF = 11 \times \sin 28^\circ \approx 11 \times 0,469 \approx 5,16$ cm, soit 5,2 cm.

Réponse. $DF \approx 5,2$ cm.

Correction de l'exercice 4 - Calculer un côté avec la tangente

- On connaît le côté adjacent à $\hat{B}$ et on cherche le côté opposé : ni l'un ni l'autre n'est l'hypoténuse, c'est donc la tangente.

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \times \tan \hat{B}$$

- $AC = 7 \times \tan 55^\circ \approx 7 \times 1,428 \approx 10,0$ cm.
- Remarque : $\tan 55^\circ > 1$, donc le côté opposé est plus grand que le côté adjacent. Cohérent avec un angle supérieur à 45° .

Réponse. $AC \approx 10,0$ cm.

Correction de l'exercice 5 - Trouver l'hypoténuse

- $[MN]$ est adjacent à $\hat{N}$, et $[NP]$ est l'hypoténuse cherchée : cosinus.

$$\cos \hat{N} = \frac{MN}{NP} \Rightarrow NP = \frac{MN}{\cos \hat{N}}$$

- $NP = \frac{6}{\cos 35^\circ} \approx \frac{6}{0,819} \approx 7,32$ cm, soit 7,3 cm.

Piège. Ici l'inconnue est au **dénominateur** : on divise par le cosinus au lieu de multiplier. Contrôle de vraisemblance : l'hypoténuse doit être plus grande que 6 cm.

Réponse. $NP \approx 7,3$ cm.

Correction de l'exercice 6 - Calculer un angle

- Adjacent et hypoténuse connus : cosinus.

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{9} \approx 0,556$$

- Avec la touche arccos (calculatrice en degrés) : $\hat{B} = \arccos\left(\frac{5}{9}\right) \approx 56,3^\circ$, soit 56° au degré près.
- Contrôle : $\cos 60^\circ = 0,5$ et $\cos 45^\circ \approx 0,707$: l'angle est entre 45° et 60° , plus près de 60° . Cohérent.

Réponse. $\hat{B} \approx 56^\circ$.

Correction de l'exercice 7 - Pythagore puis trigonométrie

a) Théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100$, donc $BC = 10$ cm.

b) On peut utiliser la tangente (les deux côtés de l'angle droit sont connus) :

- $\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{8} = 0,75$, donc $\hat{B} = \arctan(0,75) \approx 36,9^\circ$, soit 37° .

c) Les deux angles aigus sont complémentaires :

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} \approx 90 - 36,9 = 53,1^\circ$$

- Soit environ 53° . Contrôle : $\cos \hat{C} = \frac{AC}{BC} = 0,6$ et $\arccos(0,6) \approx 53,1^\circ$. Cohérent.

Réponse. a) $BC = 10$ cm · b) $\hat{B} \approx 37^\circ$ · c) $\hat{C} \approx 53^\circ$.

Correction de l'exercice 8 - Problème : une rampe de skate

La rampe est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, l'angle au sol vaut 18° .

a) La hauteur est le côté **opposé** à l'angle : sinus.

$$h = 4 \times \sin 18^\circ \approx 4 \times 0,309 \approx 1,24 \text{ m}$$

b) La longueur au sol est le côté **adjacent** : cosinus.

$$d = 4 \times \cos 18^\circ \approx 4 \times 0,951 \approx 3,80 \text{ m}$$

— Contrôle par Pythagore : $1,24^2 + 3,80^2 \approx 1,54 + 14,44 = 15,98 \approx 4^2$. Cohérent.

Réponse. a) $h \approx 1,24 \text{ m}$ · b) $d \approx 3,80 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 9 - Problème : un toit

Par symétrie, on considère la moitié du toit : un triangle rectangle dont la base mesure $\frac{6}{2} = 3 \text{ m}$ et la hauteur $1,80 \text{ m}$.

— L'angle α cherché a pour côté adjacent la base (3 m) et pour côté opposé la hauteur (1,80 m) : c'est la tangente.

$$\tan \alpha = \frac{1,80}{3} = 0,6$$

— Donc $\alpha = \arctan(0,6) \approx 31,0^\circ$.

— Contrôle : une pente de 60 % correspond bien à un angle d'environ 31° (un angle de 45° correspondrait à une pente de 100 %).

Réponse. $\alpha \approx 31,0^\circ$.

Correction de l'exercice 10 - Angles complémentaires

a) Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires : le second mesure $90 - 37 = 53^\circ$.

b) $\cos 37^\circ \approx 0,799$ et $\sin 53^\circ \approx 0,799$: les deux valeurs sont égales.

c) Explication : dans le triangle rectangle en A, le côté [AB] est **adjacent** à $\hat{B}$ mais **opposé** à $\hat{C}$. Donc

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \sin \hat{C}$$

— Comme $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires, on obtient la propriété générale $\cos x = \sin(90^\circ - x)$.

Réponse. a) 53° · b) $\approx 0,799$ pour les deux · c) $\cos x = \sin(90^\circ - x)$.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : quatre calculs

a) Adjacent connu, opposé cherché : tangente. $AC = 9 \times \tan 42^\circ \approx 9 \times 0,900 \approx 8,1 \text{ cm}$.

b) [AC] est opposé à $\hat{B}$, [BC] est l'hypoténuse : sinus. $\sin \hat{B} = \frac{9}{14} \approx 0,643$, donc $\hat{B} \approx 40^\circ$.

c) Opposé connu, hypoténuse cherchée : sinus. $BC = \frac{AC}{\sin 33^\circ} \approx \frac{5}{0,545} \approx 9,2 \text{ cm}$.

d) Les deux côtés de l'angle droit sont égaux : le triangle est rectangle **isocèle**, donc ses deux angles aigus sont égaux et valent $\frac{90}{2} = 45^\circ$. (Contrôle : $\tan \hat{B} = \frac{4}{4} = 1$ et $\arctan 1 = 45^\circ$.)

Réponse. a) $AC \approx 8,1 \text{ cm}$ · b) $\hat{B} \approx 40^\circ$ · c) $BC \approx 9,2 \text{ cm}$ · d) 45° .