Plaquette 4 – Combiner trigonométrie et Pythagore

Trigonométrie (triangle rectangle) — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux outils, et quand les utiliser.

Ce qu'on connaît	Outil
deux côtés, on cherche le troisième	**Pythagore**
un côté et un angle, on cherche un côté	trigonométrie
deux côtés, on cherche un angle	trigonométrie inverse
trois côtés, on vérifie l'angle droit	réciproque de Pythagore

Théorème de Pythagore. Dans un triangle rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Faire apparaître un triangle rectangle. On trace une hauteur, une diagonale, un rayon ou une apothème.

Figure	Triangle rectangle à faire apparaître
triangle isocèle	la hauteur issue du sommet principal
losange	la moitié formée par les deux demi-diagonales
trapèze rectangle	la hauteur abaissée du sommet oblique
hexagone régulier	le triangle formé par deux rayons et un côté
pyramide régulière	la hauteur, l'apothème et le demi-côté
pavé droit	une arête et la diagonale d'une face

Diagonales d'un cube d'arête a.

$$\text{diagonale d'une face} = a\sqrt{2} \qquad \text{grande diagonale} = a\sqrt{3}$$

Triangle équilatéral de côté a.

$$\text{hauteur} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad \text{aire} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Rédiger un enchaînement. On annonce le triangle utilisé, on justifie qu'il est rectangle, on choisit l'outil, on calcule, puis on passe au triangle suivant en gardant les valeurs non arrondies.

Correction de l'exercice 1 – Pythagore puis les deux angles

a) D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$, soit $225 = 81 + AC^2$. Donc $AC^2 = 144$ et

$$AC = 12 \text{ cm}$$

b) Pour $\hat{B}$, on connaît le côté adjacent et l'hypoténuse : $\cos\hat{B} = \dfrac{9}{15} = 0{,}6$, d'où $\hat{B} \approx 53{,}1°$. L'autre angle aigu est le complémentaire : $\hat{C} \approx 90 - 53{,}1 = 36{,}9°$; on le vérifie avec

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\cos\hat{C} = \dfrac{12}{15} = 0{,}8$.

c) L'aire d'un triangle rectangle est le demi-produit des côtés de l'angle droit : $\dfrac{9 \times 12}{2} = 54$ cm².

Réponse. a) $AC = 12$ cm · b) ≈ 53,1° et ≈ 36,9° · c) 54 cm².

Correction de l'exercice 2 – Un trapèze rectangle

a) On trace la hauteur issue de B, parallèle à $[AD]$: elle forme avec $[BC]$ un triangle rectangle. Dans ce triangle, la hauteur (6 cm) est le côté adjacent à l'angle de 40°, et le décalage horizontal x entre B et C est le côté opposé : on utilise la tangente.

$$x = 6 \times \tan 40° \approx 5{,}03 \text{ cm}$$

La grande base vaut donc $DC = 10 + x \approx 15{,}03$ cm.

b) $[BC]$ est l'hypoténuse : $\cos 40° = \dfrac{6}{BC}$, d'où $BC = \dfrac{6}{\cos 40°} \approx 7{,}83$ cm. L'aire du trapèze vaut

$\dfrac{(10 + 15{,}03) \times 6}{2} \approx 75{,}1$ cm².

Réponse. a) décalage ≈ 5,03 cm, $DC \approx 15{,}03$ cm · b) $BC \approx 7{,}83$ cm, aire ≈ 75,1 cm².

Correction de l'exercice 3 – Un hexagone régulier

a) Les rayons menés vers les sommets partagent l'hexagone en 6 triangles isocèles d'angle au sommet $360 \div 6 = 60°$. Un triangle isocèle avec un angle de 60° est équilatéral : chaque côté de l'hexagone mesure donc 10 cm, comme le rayon.

b) L'apothème est la hauteur d'un de ces triangles équilatéraux. La hauteur coupe le triangle en deux triangles rectangles d'hypoténuse 10 cm, avec un angle de 30° au centre :

$$\text{apothème} = 10 \times \cos 30° = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66 \text{ cm}$$

c) Chaque triangle a une aire de $\dfrac{10 \times 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \approx 43{,}3$ cm², donc l'hexagone a une aire de $6 \times 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3} \approx 259{,}8$ cm².

Réponse. a) 10 cm · b) ≈ 8,66 cm · c) ≈ 259,8 cm².

Correction de l'exercice 4 – Les diagonales d'un cube

a) Une diagonale de face est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont deux arêtes. D'après le théorème de Pythagore, $d^2 = 6^2 + 6^2 = 72$, donc $d = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ cm.

b) La grande diagonale est l'hypoténuse d'un triangle rectangle formé par une diagonale de face et une arête verticale :

$$D^2 = 72 + 36 = 108 \quad \text{donc} \quad D = 6\sqrt{3} \approx 10{,}39 \text{ cm}$$

c) Dans ce même triangle, l'angle α entre la grande diagonale et la face a pour côté opposé l'arête (6 cm) et pour côté adjacent la diagonale de face : $\tan\alpha = \dfrac{6}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$, d'où $\alpha \approx 35{,}3°$. Cet angle ne dépend pas de la taille du cube.

Réponse. a) $6\sqrt{2} \approx 8{,}49$ cm · b) $6\sqrt{3} \approx 10{,}39$ cm · c) ≈ 35,3°.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Une pyramide régulière

a) La hauteur de la pyramide, le demi-côté de la base et l’apothème forment un triangle rectangle (l’angle droit est au centre de la base). D’après le théorème de Pythagore, avec un demi-côté de 3 cm :

$$a^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \quad \text{donc} \quad a = 5 \text{ cm}$$

b) Dans ce même triangle, l’angle α entre une face et la base a pour côté opposé la hauteur (4 cm) et pour côté adjacent le demi-côté (3 cm) : $\tan\alpha = \frac{4}{3}$, d’où $\alpha \approx 53{,}1°$.

c) Une arête latérale est l’hypoténuse du triangle formé par la hauteur et une demi-diagonale de la base. La diagonale de la base vaut $6\sqrt{2}$, sa moitié $3\sqrt{2}$, donc l’arête vérifie $\ell^2 = 16 + 18 = 34$ et $\ell = \sqrt{34} \approx 5{,}83$ cm.

Réponse. a) 5 cm · b) $\approx 53{,}1°$ · c) $\approx 5{,}83$ cm.

Correction de l’exercice 6 – Une corde dans un cercle

Les deux rayons et la corde forment un triangle isocèle. Sa hauteur issue du centre est aussi médiane et bissectrice : elle coupe la corde en son milieu et partage l’angle de 100° en deux angles de 50°. On obtient un triangle rectangle d’hypoténuse 5 cm (un rayon).

a) La demi-corde est le côté opposé à l’angle de 50° : $5 \times \sin 50° \approx 3{,}83$ cm, d’où une corde d’environ 7,66 cm.

b) La distance du centre à la corde est le côté adjacent :

$$5 \times \cos 50° \approx 3{,}21 \text{ cm}$$

Contrôle : $3{,}83^2 + 3{,}21^2 \approx 25 = 5^2$. Pour un angle de 60°, le triangle serait équilatéral et la corde mesurerait 5 cm.

Réponse. a) $\approx 7{,}66$ cm · b) $\approx 3{,}21$ cm.

Correction de l’exercice 7 – Un triangle équilatéral

a) La hauteur coupe le triangle équilatéral en deux triangles rectangles d’hypoténuse 6 cm, dont un côté vaut 3 cm (la moitié de la base).

Avec le théorème de Pythagore : $h^2 = 6^2 - 3^2 = 27$, donc $h = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}20$ cm.

Avec la trigonométrie : les angles d’un triangle équilatéral mesurent 60°, et la hauteur est opposée à l’un d’eux, donc

$$h = 6 \times \sin 60° = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}20 \text{ cm}$$

b) L’aire vaut $\frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \approx 15{,}59$ cm².

Réponse. a) $3\sqrt{3} \approx 5{,}20$ cm · b) $9\sqrt{3} \approx 15{,}59$ cm².

Correction de l’exercice 8 – Un losange complet

Les diagonales du losange se coupent en leur milieu, perpendiculairement, et partagent ses angles en deux. Elles découpent le losange en quatre triangles rectangles d’hypoténuse 7 cm, avec un angle de $56 \div 2 = 28°$.

a) La demi-petite diagonale est le côté opposé à cet angle : $7 \times \sin 28° \approx 3{,}29$ cm. La demi-grande diagonale est le côté adjacent : $7 \times \cos 28° \approx 6{,}18$ cm. Les diagonales mesurent donc environ 6,57 cm et 12,36 cm.

b) L’aire d’un losange est le demi-produit de ses diagonales :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{6{,}57 \times 12{,}36}{2} \approx 40{,}6 \text{ cm}^2$$

Contrôle : $3{,}29^2 + 6{,}18^2 \approx 49 = 7^2$.

Réponse. a) ≈ 6,57 cm et ≈ 12,36 cm · b) ≈ 40,6 cm².

Correction de l’exercice 9 – L’aire par la trigonométrie

a) On trace la hauteur abaissée sur le côté de 11 cm. Elle forme avec le côté de 8 cm un triangle rectangle dont ce côté est l’hypoténuse, et dont la hauteur est le côté opposé à l’angle de 50° :

$$h = 8 \times \sin 50° \approx 6{,}13 \text{ cm}$$

Le pied de la hauteur est à $8 \times \cos 50° \approx 5{,}14$ cm du sommet, donc bien sur le côté de 11 cm.

b) L’aire vaut $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{11 \times 6{,}13}{2} \approx 33{,}7$ cm².

Avec un angle droit à la place de l’angle de 50°, la hauteur serait le côté de 8 cm lui-même, et l’aire atteindrait sa valeur maximale, 44 cm².

Réponse. a) $h \approx 6{,}13$ cm · b) aire ≈ 33,7 cm².

Correction de l’exercice 10 – Vérifier un angle droit

a) Le plus grand côté mesure 41 cm. On compare son carré à la somme des carrés des deux autres :

$$41^2 = 1681 \qquad 9^2 + 40^2 = 81 + 1600 = 1681$$

Les deux résultats sont égaux : d’après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle, et l’angle droit est opposé au côté de 41 cm.

b) Pour l’angle opposé au côté de 9 cm, on utilise le sinus : $\sin\alpha = \dfrac{9}{41} \approx 0{,}2195$, d’où $\alpha \approx 12{,}7°$. L’autre angle aigu est son complémentaire : $90 - 12{,}7 = 77{,}3°$; on le vérifie avec $\sin\beta = \dfrac{40}{41}$.

Réponse. a) oui · b) ≈ 12,7° et ≈ 77,3°.

Correction de l’exercice 11 – Deux triangles accolés

a) Le triangle ABD est rectangle en A : d’après le théorème de Pythagore,

$$BD^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \quad \text{donc} \quad BD = 13 \text{ cm}$$

b) Le triangle BCD est rectangle en C, d’hypoténuse $[BD]$. Pour l’angle $B\hat{D}C = 40°$, le côté opposé est $[BC]$ et le côté adjacent $[CD]$:

$BC = 13 \times \sin 40° \approx 8{,}36$ cm et $CD = 13 \times \cos 40° \approx 9{,}96$ cm.

Contrôle : $8{,}36^2 + 9{,}96^2 \approx 169{,}1$, très proche de $13^2 = 169$. Le premier calcul fournit l’hypoténuse dont le second a besoin : c’est l’enchaînement typique d’un problème en deux triangles.

Réponse. a) $BD = 13$ cm · b) $BC \approx 8{,}36$ cm et $CD \approx 9{,}96$ cm.

Correction de l’exercice 12 – Un pavé droit

a) La base est un rectangle de 8 cm sur 6 cm ; sa diagonale vérifie, d’après le théorème de Pythagore, $d^2 = 64 + 36 = 100$, donc $d = 10$ cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) La grande diagonale est l'hypoténuse du triangle rectangle formé par cette diagonale de base et une arête verticale de 10 cm :

$$D^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \quad \text{donc} \quad D = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}$$

c) Dans ce triangle, l'angle α entre la grande diagonale et la base a pour côté opposé la hauteur (10 cm) et pour côté adjacent la diagonale de base (10 cm) : $\tan\alpha = 1$, donc $\alpha = 45°$ exactement, puisque ces deux côtés sont égaux.

Réponse. a) 10 cm · b) $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm · c) 45°.

Correction de l'exercice 13 – Un triangle quelconque

a) Le triangle ACH est rectangle en H. Pour l'angle $\hat{A} = 35°$, $[AH]$ est le côté adjacent (7 cm) et $[CH]$ le côté opposé : on utilise la tangente.

$$CH = 7 \times \tan 35° \approx 4{,}90 \text{ cm}$$

b) H est sur $[AB]$, donc $HB = AB - AH = 13 - 7 = 6$ cm. Dans le triangle BCH, rectangle en H, $\tan\hat{B} = \dfrac{CH}{HB} \approx \dfrac{4{,}90}{6} \approx 0{,}817$, d'où $\hat{B} \approx 39{,}2°$.

Le troisième angle vaut $180 - 35 - 39{,}2 \approx 105{,}8°$: le triangle ABC a un angle obtus, alors qu'on a travaillé dans deux triangles rectangles.

Réponse. a) $CH \approx 4{,}90$ cm · b) $HB = 6$ cm et $\hat{B} \approx 39{,}2°$.

Correction de l'exercice 14 – Un cône

a) Le rayon, la hauteur et la génératrice forment un triangle rectangle (l'angle droit est au centre de la base). D'après le théorème de Pythagore,

$$g^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \quad \text{donc} \quad g = 13 \text{ cm}$$

b) L'angle entre l'axe et la génératrice a pour côté opposé le rayon (5 cm) et pour côté adjacent la hauteur (12 cm) : $\tan\alpha = \dfrac{5}{12}$, d'où $\alpha \approx 22{,}6°$ (l'angle au sommet complet mesure le double, environ 45,2°).

c) Le volume d'un cône vaut $\dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi \times 25 \times 12}{3} = 100\pi \approx 314{,}2$ cm³.

Réponse. a) 13 cm · b) ≈ 22,6° · c) ≈ 314,2 cm³.

Correction de l'exercice 15 – Un parallélogramme

a) La hauteur relative au côté de 14 cm forme, avec le côté de 9 cm, un triangle rectangle dont ce côté est l'hypoténuse et la hauteur le côté opposé à l'angle de 62° :

$$h = 9 \times \sin 62° \approx 7{,}95 \text{ cm}$$

b) L'aire d'un parallélogramme est le produit d'une base par la hauteur correspondante : $14 \times 7{,}95 \approx 111{,}3$ cm².

c) Le pied de la hauteur est décalé de $9 \times \cos 62° \approx 4{,}23$ cm. La grande diagonale est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés $14 + 4{,}23 = 18{,}23$ cm et 7,95 cm : $\sqrt{18{,}23^2 + 7{,}95^2} \approx 19{,}89$ cm.

Réponse. a) $h \approx 7{,}95$ cm · b) ≈ 111,3 cm² · c) ≈ 19,89 cm.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : une figure composée

a) Pour l'angle $\hat{B}$, $[AB]$ est le côté adjacent (15 cm), $[AC]$ le côté opposé, $[BC]$ l'hypoténuse :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$AC = 15 \times \tan 40° \approx 12{,}59 \text{ cm} \qquad BC = \frac{15}{\cos 40°} \approx 19{,}58 \text{ cm}$$

b) L'aire du triangle s'écrit de deux façons : $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{BC \times AH}{2}$. Donc $AH = \frac{AB \times AC}{BC} \approx \frac{15 \times 12{,}59}{19{,}58} \approx 9{,}65$ cm.

c) Le triangle ABH est rectangle en H : $BH = 15 \times \cos 40° \approx 11{,}49$ cm, puis $HC = BC - BH \approx 8{,}09$ cm.

d) $BH \times HC \approx 92{,}9$ et $AH^2 \approx 93{,}1$: la relation est vérifiée aux arrondis près.

Réponse. a) $AC \approx 12{,}59$ cm, $BC \approx 19{,}58$ cm · b) $AH \approx 9{,}65$ cm · c) $BH \approx 11{,}49$ cm, $HC \approx 8{,}09$ cm · d) relation vérifiée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).