Plaquette 5 – Problèmes concrets : hauteurs, pentes et distances

Trigonométrie (triangle rectangle) — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Modéliser en trois gestes. Faire un schéma, repérer l'angle droit, nommer les longueurs connues et cherchées.

Situation concrète	Triangle rectangle
angle d'élévation d'un sommet	hauteur, distance horizontale, ligne de visée
pente d'une route ou d'une rampe	dénivelé, distance horizontale, longueur de la pente
navigation	route suivie, écart latéral, distance parcourue
montée d'un avion	altitude gagnée, distance au sol, trajectoire

Vocabulaire des angles.

Terme	Définition
angle d'élévation	mesuré depuis l'horizontale, vers le haut
angle de dépression	mesuré depuis l'horizontale, vers le bas
cap	angle avec la direction du nord

Pente en pourcentage. Une pente de t % signifie t mètres de dénivelé pour 100 m à l'horizontale :

$$\tan\alpha = \frac{t}{100}$$

Attention aux unités. Les longueurs doivent être exprimées dans la même unité avant tout calcul. La calculatrice doit être en degrés.

Contrôle de vraisemblance. Une hauteur supérieure à la distance de visée pour un angle inférieur à 45° est impossible. Un angle de pente de 60° pour une route ne l'est pas moins.

Rédiger. On termine par une phrase complète avec l'unité et un arrondi adapté : le mètre pour une montagne, le centimètre pour une pièce.

Correction de l'exercice 1 – La hauteur d'une montagne

L'observateur, le pied et le sommet de la montagne forment un triangle rectangle. Pour l'angle de 28°, la distance au pied (1200 m) est le côté adjacent, la hauteur h le côté opposé et la distance au sommet D l'hypoténuse.

a) Tangente : $h = 1200 \times \tan 28° \approx 638$ m.

b) Cosinus, inconnue au dénominateur :

$$D = \frac{1200}{\cos 28°} \approx 1359 \text{ m}$$

Contrôle : $1200^2 + 638^2 \approx 1\,847\,000$ et $1359^2 \approx 1\,847\,000$. Si l'observateur est à 600 m d'altitude, le sommet culmine vers 1238 m.

Réponse. a) environ 638 m · b) environ 1359 m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Un bateau vu d’un phare

L’angle de dépression, mesuré vers le bas depuis l’horizontale du gardien, est égal à l’angle d’élévation sous lequel on voit le haut du phare depuis le bateau (ce sont des angles alternes-internes). On travaille dans le triangle rectangle au pied du phare : la hauteur (45 m) est le côté opposé à l’angle de 18°.

a) Tangente : $d = \dfrac{45}{\tan 18°} \approx 138{,}5$ m.

b) Sinus : $D = \dfrac{45}{\sin 18°} \approx 145{,}6$ m.

$$d \approx 138{,}5 \text{ m} \qquad D \approx 145{,}6 \text{ m}$$

Contrôle : $45^2 + 138{,}5^2 \approx 21\,207$ et $145{,}6^2 \approx 21\,199$.

Réponse. a) environ 138,5 m · b) environ 145,6 m.

Correction de l’exercice 3 – Un avion en montée

La trajectoire est l’hypoténuse (2500 m) d’un triangle rectangle ; l’altitude est le côté opposé à l’angle de 15°, la distance au sol le côté adjacent.

a) Sinus : $2500 \times \sin 15° \approx 647$ m.

b) Cosinus : $2500 \times \cos 15° \approx 2415$ m.

$$\text{altitude} \approx 647 \text{ m} \qquad \text{distance au sol} \approx 2415 \text{ m}$$

Contrôle : $647^2 + 2415^2 \approx 6\,250\,800$, proche de $2500^2 = 6\,250\,000$. L’angle étant faible, la distance au sol est proche de la longueur de la trajectoire ; la pente vaut pourtant $\tan 15° \approx 27\,\%$.

Réponse. a) environ 647 m · b) environ 2415 m.

Correction de l’exercice 4 – La flèche d’une grue

La flèche est l’hypoténuse (25 m) d’un triangle rectangle ; la hauteur est le côté opposé à l’angle de 65°, la portée horizontale le côté adjacent.

a) Sinus : $25 \times \sin 65° \approx 22{,}66$ m.

b) Cosinus : $25 \times \cos 65° \approx 10{,}57$ m.

$$h \approx 22{,}66 \text{ m} \qquad d \approx 10{,}57 \text{ m}$$

Contrôle : $22{,}66^2 + 10{,}57^2 \approx 625 = 25^2$. En abaissant la flèche à 40°, la portée augmente ($25 \times \cos 40° \approx 19{,}15$ m) mais la hauteur diminue ($\approx 16{,}07$ m).

Réponse. a) environ 22,66 m · b) environ 10,57 m.

Correction de l’exercice 5 – Un panneau solaire

Le panneau est l’hypoténuse (2,4 m) d’un triangle rectangle ; la différence de hauteur entre ses deux bords est le côté opposé à l’angle de 35°, l’emprise au sol le côté adjacent.

a) Sinus : $2{,}4 \times \sin 35° \approx 1{,}38$ m.

b) Cosinus : $2{,}4 \times \cos 35° \approx 1{,}97$ m.

$$\text{hauteur} \approx 1{,}38 \text{ m} \qquad \text{emprise} \approx 1{,}97 \text{ m}$$

Contrôle : $1{,}38^2 + 1{,}97^2 \approx 5{,}78$, proche de $2{,}4^2 = 5{,}76$ (écart dû aux arrondis). À 30°, la hauteur serait exactement $2{,}4 \times 0{,}5 = 1{,}2$ m.

Réponse. a) environ 1,38 m · b) environ 1,97 m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Un téléphérique

Le câble est l’hypoténuse (1800 m) d’un triangle rectangle ; le dénivelé est le côté opposé à l’angle de 22°, la distance horizontale le côté adjacent.

a) Sinus : $1800 \times \sin 22° \approx 674$ m.

b) Cosinus : $1800 \times \cos 22° \approx 1669$ m.

c) La pente est le quotient du dénivelé par la distance horizontale, c’est-à-dire la tangente de l’angle :

$$\frac{674}{1669} \approx \tan 22° \approx 0{,}404$$

soit environ 40,4 %. Un départ à 1200 m d’altitude mène donc vers 1874 m.

Réponse. a) environ 674 m · b) environ 1669 m · c) environ 40,4 %.

Correction de l’exercice 7 – Une tour penchée

a) L’axe de la tour (56 m) est l’hypoténuse d’un triangle rectangle ; le décalage du sommet (4 m) est le côté opposé à l’angle d’inclinaison α par rapport à la verticale :

$$\sin \alpha = \frac{4}{56} \approx 0{,}0714 \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 4{,}1°$$

b) La hauteur réelle du sommet est le côté adjacent. D’après le théorème de Pythagore, $h^2 = 56^2 - 4^2 = 3136 - 16 = 3120$, donc $h \approx 55{,}86$ m (on trouve la même valeur avec $56 \times \cos \alpha$).

L’inclinaison ne fait perdre qu’environ 14 cm de hauteur : un faible angle coûte très peu en hauteur.

Réponse. a) environ 4,1° · b) environ 55,86 m.

Correction de l’exercice 8 – Une plongée sous-marine

La pente, la profondeur et l’éloignement horizontal forment un triangle rectangle. La profondeur atteinte (30 m) est le côté opposé à l’angle de 40° ; le trajet le long de la pente est l’hypoténuse, l’éloignement horizontal le côté adjacent.

a) Sinus, inconnue au dénominateur : $L = \dfrac{30}{\sin 40°} \approx 46{,}67$ m.

b) Tangente : $d = \dfrac{30}{\tan 40°} \approx 35{,}75$ m.

$$L \approx 46{,}67 \text{ m} \qquad d \approx 35{,}75 \text{ m}$$

Contrôle : $30^2 + 35{,}75^2 \approx 2178$ et $46{,}67^2 \approx 2178$. Sur une pente de 20°, il faudrait parcourir près de 88 m pour la même profondeur.

Réponse. a) environ 46,67 m · b) environ 35,75 m.

Correction de l’exercice 9 – Une triangulation

Le triangle ABC est rectangle en A. Pour l’angle $\hat{B} = 58°$, le côté adjacent est $[AB]$ (500 m), le côté opposé $[AC]$ et l’hypoténuse $[BC]$.

a) Tangente : $AC = 500 \times \tan 58° \approx 800$ m.

b) Cosinus, inconnue au dénominateur :

$$\cos 58° = \frac{500}{BC} \quad \text{donc} \quad BC = \frac{500}{\cos 58°} \approx 943{,}6 \text{ m}$$

Contrôle : $500^2 + 800^2 = 890\,000$ et $943{,}6^2 \approx 890\,400$. Toutes les mesures ont été prises

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

depuis A et B : c'est le principe de la triangulation, qui permet de mesurer une distance sans se rendre au point C.

Réponse. a) environ 800 m · b) environ 943,6 m.

Correction de l'exercice 10 – Le dénivelé d'une route

a) Une pente de 12 % signifie qu'on monte de 12 m pour 100 m à l'horizontale : c'est la tangente de l'angle avec l'horizontale.

$$\tan\alpha = 0{,}12 \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 6{,}8°$$

b) Sur 3000 m à l'horizontale, le dénivelé vaut $0{,}12 \times 3000 = 360$ m.

c) La route est l'hypoténuse : d'après le théorème de Pythagore, $L^2 = 3000^2 + 360^2 = 9\,129\,600$, donc $L \approx 3021{,}5$ m. Elle ne dépasse la distance horizontale que de 21,5 m environ : pour une pente modérée, les deux longueurs sont très proches.

Réponse. a) environ 6,8° · b) 360 m · c) environ 3021,5 m.

Correction de l'exercice 11 – Deux visées successives

On note h la hauteur de l'immeuble et d la distance entre le second point d'observation et le pied de l'immeuble. Depuis le second point, l'angle vaut 45° :

$$\tan 45° = \frac{h}{d} = 1 \quad \text{donc} \quad d = h$$

Depuis le premier point, situé 40 m plus loin, la distance au pied vaut $h + 40$ et $\tan 30° = \dfrac{h}{h+40}$. Avec $\tan 30° \approx 0{,}5774$, le produit en croix donne $h = 0{,}5774h + 23{,}096$, soit $0{,}4226h = 23{,}096$ et $h \approx 54{,}6$ m.

L'immeuble mesure environ 54,6 m. Cette méthode n'utilise aucune distance au pied de l'immeuble : seulement les deux angles et la distance entre les deux points d'observation.

Réponse. L'immeuble mesure environ 54,6 m.

Correction de l'exercice 12 – Un cerf-volant et son fil

Le fil tendu est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ; l'altitude (75 m) est le côté opposé à l'angle de 52°, la distance horizontale le côté adjacent.

a) Sinus, inconnue au dénominateur : $L = \dfrac{75}{\sin 52°} \approx 95{,}18$ m.

b) Tangente : $d = \dfrac{75}{\tan 52°} \approx 58{,}60$ m.

$$L \approx 95{,}18 \text{ m} \qquad d \approx 58{,}60 \text{ m}$$

Contrôle : $75^2 + 58{,}60^2 \approx 9059$ et $95{,}18^2 \approx 9059$. Avec un vent plus fort (angle de 70°), il suffirait d'environ 80 m de fil pour la même altitude.

Réponse. a) environ 95,18 m · b) environ 58,60 m.

Correction de l'exercice 13 – Un escalier de secours

La hauteur (7,2 m) est le côté opposé à l'angle de l'escalier avec le sol.

a) La longueur horizontale est le côté adjacent : $\tan 38° = \dfrac{7{,}2}{d}$, donc

$$d = \frac{7{,}2}{\tan 38°} \approx 9{,}22 \text{ m}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

C'est un **minimum** : une longueur plus courte donnerait un angle supérieur à 38°, interdit.

b) L'escalier est l'hypoténuse : $L = \dfrac{7{,}2}{\sin 38°} \approx 11{,}69$ m. Avec des marches de 18 cm de haut, il faut $720 \div 18 = 40$ marches, d'une profondeur d'environ $922 \div 40 \approx 23$ cm.

Réponse. a) environ 9,22 m · b) environ 11,69 m.

Correction de l'exercice 14 – Repérer une erreur de modèle

La distance de l'élève à l'arbre (20 m) est mesurée au sol : c'est le côté **adjacent** à l'angle de 50°. La hauteur de l'arbre est le côté **opposé**. Aucune hypoténuse n'est connue, il fallait donc la tangente, et non le sinus :

$$h = 20 \times \tan 50° \approx 23{,}8 \text{ m}$$

Son calcul avec le sinus supposait que 20 m soit la longueur de la ligne de visée (l'hypoténuse).

Contrôle de vraisemblance : l'angle dépasse 45°, donc la hauteur doit dépasser la distance au sol ; $23{,}8 > 20$ convient, alors que sa réponse ($15{,}3 < 20$) est incohérente. Pour être précis, il faudrait encore ajouter la hauteur des yeux de l'observateur.

Réponse. Il fallait la tangente, pas le sinus : $h = 20 \tan 50° \approx 23{,}8$ m.

Correction de l'exercice 15 – Comparer deux toboggans

a) Pour chaque toboggan, la hauteur est le côté opposé à l'angle avec le sol et l'emprise au sol le côté adjacent : on utilise la tangente.

$$\tan \alpha_A = \frac{4}{6} \approx 0{,}667 \quad \text{donc} \quad \alpha_A \approx 33{,}7°$$

$\tan \alpha_B = \dfrac{3{,}5}{4{,}8} \approx 0{,}729$, d'où $\alpha_B \approx 36{,}1°$.

b) Le toboggan **B** est le plus raide, bien qu'il soit moins haut.

c) Les longueurs de glisse sont les hypoténuses : $\sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \approx 7{,}21$ m pour A et $\sqrt{3{,}5^2 + 4{,}8^2} = \sqrt{35{,}29} \approx 5{,}94$ m pour B. Le toboggan A est plus long mais moins raide.

Réponse. a) ≈ 33,7° et ≈ 36,1° · b) le toboggan B · c) ≈ 7,21 m et ≈ 5,94 m.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : un pont suspendu

a) Le pylône, le tablier et le câble forment un triangle rectangle au pied du pylône. D'après le théorème de Pythagore,

$$L^2 = 90^2 + 150^2 = 30\,600 \quad \text{donc} \quad L \approx 174{,}93 \text{ m}$$

b) Pour l'angle avec le tablier, la hauteur (90 m) est le côté opposé et la distance (150 m) le côté adjacent : $\tan \alpha = \dfrac{90}{150} = 0{,}6$, d'où $\alpha \approx 31°$.

c) Pour le second câble : $\sqrt{90^2 + 60^2} = \sqrt{11\,700} \approx 108{,}17$ m, et $\tan \beta = \dfrac{90}{60} = 1{,}5$, d'où $\beta \approx 56{,}3°$.

d) Le second câble est bien plus incliné ($56{,}3° > 31°$) : son ancrage est plus proche du pylône. Plus l'ancrage s'éloigne, plus le câble est long et proche de l'horizontale.

Réponse. a) ≈ 174,93 m · b) ≈ 31° · c) ≈ 108,17 m et ≈ 56,3° · d) le second est bien plus incliné.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).