Dérivation — Première générale

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Dériver, c'est mesurer une pente. Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a : c'est la vitesse à laquelle la fonction varie à cet instant précis. Ces 20 exercices partent du taux de variation entre deux points, le font tendre vers le nombre dérivé, puis installent les formules usuelles et l'équation de tangente. La seconde moitié exploite le résultat central du chapitre — le SIGNE de f' donne les variations de f — pour dresser des tableaux de variations et résoudre de vrais problèmes d'optimisation : volume d'une boîte, aire d'un enclos, coût de production, trajectoire d'un mobile.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-generale/derivation

Exercice 1 – Du taux de variation au nombre dérivé

Soit $f(x) = x^2$. Calcule le taux de variation de f entre 1 et 3, puis entre 1 et 1,1, puis entre 1 et 1,01. Que semble-t-il se passer ?

Exercice 2 – Les dérivées usuelles

Donne la dérivée de chacune de ces fonctions de référence : $f(x) = 5$; $g(x) = 3x$; $h(x) = x^2$; $k(x) = x^3$; $m(x) = \frac{1}{x}$; $n(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 3 – Dériver un polynôme

Calcule la dérivée de chaque fonction, puis la valeur demandée.

1. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$; calcule $f'(1)$.

2. $g(x) = x^3 - 4x + 7$; calcule $g'(2)$.

3. $h(x) = -2x^2 + x$; calcule $h'(0)$.

Exercice 4 – Nombre dérivé et pente de la tangente

Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Calcule $f'(x)$, puis $f'(3)$, $f'(1)$ et $f'(0)$. Interprète chaque résultat en termes de tangente.

Exercice 5 – Première équation de tangente

Soit $f(x) = x^2$. Détermine l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Exercice 6 – Tangentes à une courbe cubique

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Détermine les équations des tangentes à la courbe aux points d'abscisses -1 puis 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Dériver avec une racine et une fraction

Soit $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{3}{x}$, définie pour $x > 0$. Calcule $f'(x)$, puis $f'(1)$ et $f'(4)$.

Exercice 8 – Signe de la dérivée et variations

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Étudie le signe de $f'(x)$ et déduis-en le tableau de variations de f.

Exercice 9 – Tableau de variations d'une fonction cubique

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et précise les extremums locaux.

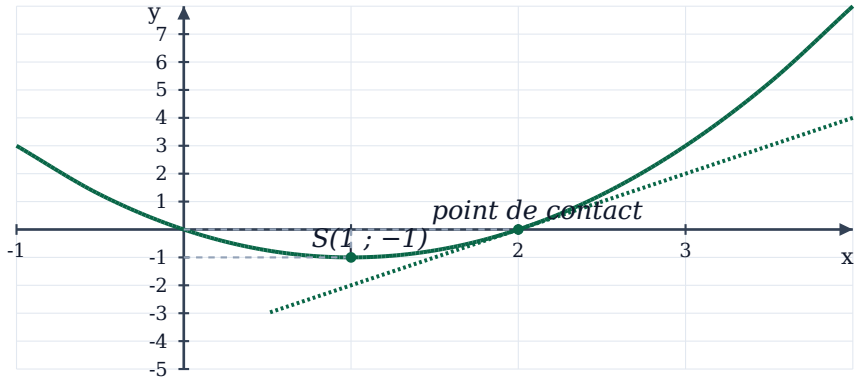
Exercice 10 – Lire une tangente sur un graphique

La courbe ci-dessous est celle de $f(x) = x^2 - 2x$ (trait plein), tracée avec sa tangente au point d'abscisse 2 (pointillés).

1. Lis graphiquement $f(2)$ et le coefficient directeur de la tangente, puis donne $f'(2)$.

2. Retrouve l'équation de cette tangente par le calcul.

3. En quel point la tangente à la courbe est-elle horizontale ?



Exercice 11 – Volume maximal d'une boîte

Dans une plaque de carton carrée de 20 cm de côté, on découpe un carré de côté x à chaque coin, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Exprime le volume $V(x)$ de la boîte, et précise pour quelles valeurs de x le problème a un sens.

2. Calcule $V'(x)$ et détermine la valeur de x qui rend le volume maximal.

3. Donne ce volume maximal au cm³ près.

Exercice 12 – Coût marginal toujours croissant

Le coût total de production, en euros, de x articles est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, pour x entre 0 et 20. Le coût marginal est modélisé par $C'(x)$.

1. Calcule $C'(x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Montre que le coût total est strictement croissant sur $[0\,;20]$.

3. Le coût marginal admet-il un minimum ? Si oui, pour quelle production ?

Exercice 13 – Tangente parallèle à une droite

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Détermine le point de la courbe où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 4$, puis donne l'équation de cette tangente.

Exercice 14 – Extremums d'une fonction cubique

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Détermine les points où la tangente est horizontale, puis précise la nature de chaque extremum.

Exercice 15 – Position, vitesse et sens de déplacement

Un mobile se déplace sur un axe. Sa position, en mètres, à l'instant t (en secondes) est $d(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, pour $t \in [0\,;5]$. Sa vitesse est donnée par $v(t) = d'(t)$.

1. Calcule $v(t)$ et factorise-la.

2. À quels instants le mobile s'arrête-t-il ?

3. Décris le mouvement : quand avance-t-il, quand recule-t-il ?

Exercice 16 – Dériver une exponentielle

On admet que la fonction exponentielle est sa propre dérivée : $(e^x)' = e^x$. Soit $h(x) = e^x - x$.

1. Calcule $h'(x)$ et étudie son signe.

2. Dresse le tableau de variations de h et donne son minimum.

3. Déduis-en que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x.

Exercice 17 – Enclos contre un mur

On veut clôturer un enclos rectangulaire adossé à un mur : le mur constitue l'un des grands côtés, et l'on ne grillage que les trois autres côtés. On dispose de 60 m de grillage et l'on note x la longueur de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

1. Exprime la longueur du côté parallèle au mur, puis l'aire $A(x)$.

2. Détermine les dimensions qui rendent l'aire maximale, et cette aire.

3. Compare avec le cas d'un enclos entièrement clôturé avec les mêmes 60 m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

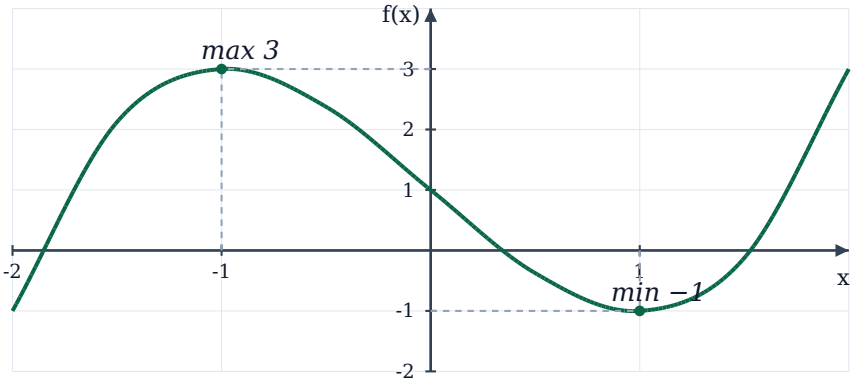
Exercice 18 – Nombre de solutions d'une équation

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$, représentée ci-dessous.

1. Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déduis-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Donne un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune de ces solutions.



Exercice 19 – Retrouver le point de contact

Soit $f(x) = x^2$. Détermine les abscisses a pour lesquelles la tangente à la courbe au point d'abscisse a passe par le point $B(0\,;-1)$.

Exercice 20 – Synthèse : étude d'une fonction sur un intervalle

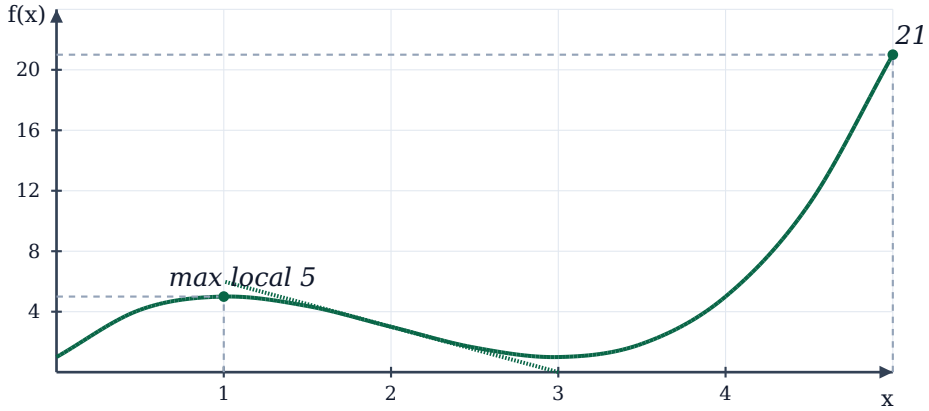
Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, étudiée sur $[0\,;5]$ et représentée ci-dessous avec sa tangente au point d'abscisse 2.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise-la.

2. Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;5]$.

3. Donne le maximum et le minimum de f sur cet intervalle.

4. Détermine l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Du taux de variation au nombre dérivé

Le taux de variation entre deux abscisses a et b est $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. C'est le coefficient directeur de la droite qui passe par les deux points de la courbe.

Entre 1 et 3 : $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{9-1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Entre 1 et 1,1 : $f(1{,}1) = 1{,}21$, donc le taux vaut $\dfrac{1{,}21-1}{0{,}1} = \dfrac{0{,}21}{0{,}1} = 2{,}1$.

Entre 1 et 1,01 : $f(1{,}01) = 1{,}0201$, donc le taux vaut $\dfrac{0{,}0201}{0{,}01} = 2{,}01$.

En poursuivant, entre 1 et 1,001, on trouverait 2,001.

Les taux se rapprochent donc de 2 à mesure que le second point se rapproche de 1.

Cette valeur limite s'appelle le NOMBRE DÉRIVÉ de f en 1 et se note $f'(1)$. Ici $f'(1) = 2$.

Interprétation géométrique : la droite qui passe par les deux points bascule peu à peu et vient se coller à la courbe. Sa position limite est la TANGENTE au point d'abscisse 1, de coefficient directeur 2.

Vérification par la formule qu'on établira plus loin : pour $f(x) = x^2$, on a $f'(x) = 2x$, donc $f'(1) = 2$. ✔

Ce qu'il faut retenir : un taux de variation concerne DEUX points et donne une pente moyenne ; le nombre dérivé concerne UN point et donne une pente instantanée.

Réponse. Taux successifs 4, puis 2,1, puis 2,01 : ils tendent vers 2, qui est le nombre dérivé $f'(1)$.

Rappel de cours. Taux de variation $= \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (pente moyenne) · nombre dérivé $f'(a)$ = sa limite quand b tend vers a (pente instantanée).

Erreur fréquente. Diviser par b au lieu de $b-a$. Le dénominateur est l'ÉCART entre les deux abscisses, ici 0,1 et non 1,1.

Correction de l'exercice 2 – Les dérivées usuelles

Ces six formules sont à connaître par cœur : tout le chapitre s'y ramène.

$f(x) = 5$ est une fonction constante, donc $f'(x) = 0$. Une constante ne varie pas : sa pente est nulle en tout point.

$g(x) = 3x$ est une fonction affine, donc $g'(x) = 3$. La courbe est une droite de coefficient directeur 3, et sa pente est la même partout.

$h(x) = x^2$ donne $h'(x) = 2x$. La pente change avec x : négative à gauche de 0, nulle en 0, positive à droite.

$k(x) = x^3$ donne $k'(x) = 3x^2$. On applique la règle générale $(x^n)' = n\,x^{n-1}$: l'exposant descend en facteur et diminue de 1.

$m(x) = \dfrac{1}{x}$ donne $m'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, valable pour $x \neq 0$. Le signe moins est essentiel : la fonction inverse est décroissante sur chacun de ses intervalles.

$n(x) = \sqrt{x}$ donne $n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, valable pour $x > 0$ strictement — en 0, la fonction n'est pas

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

dérivable.

Contrôle de cohérence sur h : on a trouvé $h'(1) = 2$ à l'exercice précédent par les taux de variation, et la formule donne $2 \times 1 = 2$. ✔

Contrôle sur m avec $x = 2$: $m'(2) = -\dfrac{1}{4} = -0{,}25$. Le taux entre 2 et 2,01 vaut $\dfrac{0{,}497512 - 0{,}5}{0{,}01} \approx -0{,}2488$, très proche. ✔

Réponse. $f' = 0$; $g' = 3$; $h' = 2x$; $k' = 3x^2$; $m' = -\dfrac{1}{x^2}$; $n' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Rappel de cours. $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ couvre x, x^2, x^3… Les deux cas particuliers à mémoriser à part sont $\dfrac{1}{x}$ et $\sqrt{x}$.

Erreur fréquente. Oublier le signe moins dans la dérivée de $\dfrac{1}{x}$. Sans lui, on conclurait que la fonction inverse est croissante, ce qui est faux.

Correction de l'exercice 3 – Dériver un polynôme

Deux règles suffisent : la dérivée d'une SOMME est la somme des dérivées, et un coefficient constant se conserve — $(k\,u)' = k\,u'$.

On dérive donc terme à terme, sans jamais mélanger les termes entre eux.

$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$: la dérivée de $3x^2$ est $3 \times 2x = 6x$, celle de $-5x$ est -5, celle de 2 est 0.

Donc $f'(x) = 6x - 5$, et $f'(1) = 6 - 5 = 1$.

$g(x) = x^3 - 4x + 7$: la dérivée de x^3 est $3x^2$, celle de $-4x$ est -4, celle de 7 est 0.

Donc $g'(x) = 3x^2 - 4$, et $g'(2) = 3 \times 4 - 4 = 12 - 4 = 8$.

$h(x) = -2x^2 + x$: la dérivée de $-2x^2$ est $-4x$, celle de x est 1.

Donc $h'(x) = -4x + 1$, et $h'(0) = 1$.

Contrôle sur h par le taux de variation entre 0 et 0,01 :
$h(0{,}01) = -0{,}0002 + 0{,}01 = 0{,}0098$, donc le taux vaut 0,98, proche de 1. ✔

Remarque importante : la dérivée d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n - 1$. Le terme constant disparaît toujours — c'est un repère pour se relire.

Réponse. $f'(x) = 6x - 5$ et $f'(1) = 1$ · $g'(x) = 3x^2 - 4$ et $g'(2) = 8$ · $h'(x) = -4x + 1$ et $h'(0) = 1$.

Rappel de cours. On dérive terme à terme. Le degré baisse de 1 et la constante disparaît : deux contrôles immédiats de la forme du résultat.

Erreur fréquente. Conserver le terme constant, en écrivant $f'(x) = 6x - 5 + 2$. La dérivée d'une constante est nulle, sans exception.

Correction de l'exercice 4 – Nombre dérivé et pente de la tangente

On dérive terme à terme : la dérivée de x^2 est $2x$, celle de $-2x$ est -2.

Donc $f'(x) = 2x - 2$.

$f'(3) = 6 - 2 = 4$: la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 a pour coefficient directeur 4. Elle monte fortement.

$f'(1) = 2 - 2 = 0$: la tangente au point d'abscisse 1 a un coefficient directeur nul, donc elle est HORIZONTALE.

$f'(0) = -2$: la tangente au point d'abscisse 0 a un coefficient directeur négatif, donc elle descend.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Ces trois résultats racontent la même histoire : la fonction décroît avant 1, atteint un creux en 1, puis croît.

Vérification par les images : $f(0) = 0$, $f(1) = 1 - 2 = -1$, $f(3) = 9 - 6 = 3$. La fonction descend bien de 0 à -1, puis remonte. ✔

Cohérence avec le chapitre précédent : la forme canonique est $f(x) = (x-1)^2 - 1$, de sommet $S(1\,;-1)$. Le sommet est exactement là où la tangente est horizontale. ✔

C'est un résultat général qu'on retrouvera tout au long du chapitre : en un extremum, le nombre dérivé s'annule.

Réponse. $f'(x) = 2x - 2$ · $f'(3) = 4$ (tangente montante) · $f'(1) = 0$ (tangente horizontale, au sommet) · $f'(0) = -2$ (tangente descendante).

Rappel de cours. $f'(a)$ EST le coefficient directeur de la tangente en a. Signe positif → ça monte · négatif → ça descend · nul → tangente horizontale.

Erreur fréquente. Confondre $f'(a)$ et $f(a)$. Le premier est une pente, le second une ordonnée : $f'(1) = 0$ ne signifie pas que la courbe passe par 0.

Correction de l'exercice 5 – Première équation de tangente

La formule à connaître est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, où a est l'abscisse du point de contact.

Elle se lit ainsi : c'est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ qui passe par le point de coordonnées $(a\,;f(a))$.

Il faut donc DEUX ingrédients : l'ordonnée du point, $f(a)$, et la pente, $f'(a)$.

Ordonnée du point de contact : $f(2) = 2^2 = 4$. Le point de contact est $A(2\,;4)$.

Pente : $f'(x) = 2x$, donc $f'(2) = 4$.

On remplace dans la formule : $y = 4(x-2) + 4$.

On développe : $y = 4x - 8 + 4$, soit $y = 4x - 4$.

Vérification que la tangente passe bien par le point de contact : pour $x = 2$, $y = 8 - 4 = 4$. ✔ C'est bien l'ordonnée de A.

Vérification de la position : pour $x = 3$, la tangente donne $y = 8$ alors que la courbe donne $f(3) = 9$. La courbe est au-dessus, ce qui est normal pour une parabole tournée vers le haut.

Erreur fréquente : écrire $y = f'(a)\,x + f(a)$ en oubliant le $(x-a)$. On obtiendrait $y = 4x + 4$, une droite qui ne touche même pas la courbe au bon endroit.

Réponse. La tangente a pour équation $y = 4x - 4$.

Rappel de cours. $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Deux calculs préalables, toujours les mêmes : $f(a)$ puis $f'(a)$.

Erreur fréquente. Oublier la parenthèse $(x-a)$ et écrire $y = f'(a)x + f(a)$. Le test « la tangente passe-t-elle par le point de contact ? » démasque l'erreur en une ligne.

Correction de l'exercice 6 – Tangentes à une courbe cubique

On calcule d'abord la dérivée, une seule fois pour les deux questions : $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Premier point, $a = -1$. Ordonnée : $f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) = -1 + 3 = 2$.

Attention aux deux signes : $(-1)^3 = -1$ (l'exposant impair conserve le signe) et $-3 \times (-1) = +3$.

Pente : $f'(-1) = 3 \times 1 - 3 = 0$.

Équation : $y = 0 \times (x+1) + 2$, soit $y = 2$. C'est une droite HORIZONTALE.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Interprétation : le point d'abscisse -1 est un extremum local de la fonction, puisque la tangente y est horizontale.

Second point, $a = 2$. Ordonnée : $f(2) = 8 - 6 = 2$.

Pente : $f'(2) = 3 \times 4 - 3 = 12 - 3 = 9$.

Équation : $y = 9(x - 2) + 2 = 9x - 18 + 2$, soit $y = 9x - 16$.

Vérification au point de contact : pour $x = 2$, $y = 18 - 16 = 2$. ✔ Cela correspond bien à $f(2)$.

Remarque intéressante : les deux points ont la même ordonnée 2, mais des tangentes complètement différentes. L'ordonnée ne dit rien de la pente — ce sont deux informations indépendantes.

Réponse. En $x = -1$: $y = 2$ (tangente horizontale) · en $x = 2$: $y = 9x - 16$.

Rappel de cours. Une tangente horizontale signale un extremum local (mais l'inverse n'est pas garanti : elle peut aussi traverser la courbe).

Erreur fréquente. Calculer $(-1)^3 = 1$. Un exposant IMPAIR conserve le signe : $(-1)^3 = -1$, contrairement à $(-1)^2 = 1$.

Correction de l'exercice 7 – Dériver avec une racine et une fraction

On dérive terme à terme, en utilisant les deux formules de référence et la règle $(k\,u)' = k\,u'$.

Premier terme : $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $(2\sqrt{x})' = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Le 2 se simplifie avec le 2 du dénominateur : c'est une simplification qui revient souvent.

Second terme : $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, donc $\left(\dfrac{3}{x}\right)' = 3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{3}{x^2}$.

Au total : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2}$.

$f'(1) = \dfrac{1}{1} - \dfrac{3}{1} = 1 - 3 = -2$. La tangente au point d'abscisse 1 descend.

$f'(4) = \dfrac{1}{\sqrt{4}} - \dfrac{3}{16} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{16} = \dfrac{8}{16} - \dfrac{3}{16} = \dfrac{5}{16} = 0{,}3125$. Cette fois la tangente monte.

Le changement de signe entre 1 et 4 indique que la fonction passe par un minimum entre ces deux valeurs.

Vérification par les images : $f(1) = 2 + 3 = 5$, $f(2) = 2\sqrt{2} + 1{,}5 \approx 4{,}33$, $f(4) = 4 + 0{,}75 = 4{,}75$. ✔ La fonction descend puis remonte, comme annoncé par le signe de f'.

Point de vigilance sur le domaine : f et f' ne sont définies que pour $x > 0$, à cause de la racine et de la division. Le préciser fait partie de la réponse.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$ · $f'(1) = -2$ · $f'(4) = \dfrac{5}{16} = 0{,}3125$.

Rappel de cours. $(k\,u)' = k\,u'$: le coefficient traverse la dérivation sans changer. Ne pas le dériver lui aussi.

Erreur fréquente. Dériver $\dfrac{3}{x}$ en $\dfrac{3}{1} = 3$ en croyant appliquer la règle des puissances. Il faut passer par $3 \times \dfrac{1}{x}$, dont la dérivée est $-\dfrac{3}{x^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Signe de la dérivée et variations

Résultat central du chapitre : sur un intervalle, si f' est positive alors f est croissante ; si f' est négative alors f est décroissante.

On calcule la dérivée : $f'(x) = 2x - 6$.

On résout $f'(x) = 0$: $2x - 6 = 0$ donne $x = 3$.

On étudie le signe de cette expression affine : $2x - 6 < 0$ pour $x < 3$, et $2x - 6 > 0$ pour $x > 3$.

Conclusion : f est DÉCROISSANTE sur $]-\infty\,;3]$ et CROISSANTE sur $[3\,;+\infty[$.

La fonction admet donc un minimum en $x = 3$, de valeur $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$.

Tableau de variations : f descend de $+\infty$ jusqu'à -4 en $x = 3$, puis remonte vers $+\infty$.

Vérification par le chapitre précédent : la forme canonique de f est $(x-3)^2 - 4$, de sommet $S(3\,;-4)$. ✔ Les deux méthodes donnent exactement le même résultat.

Vérification numérique : $f(2) = 4 - 12 + 5 = -3$, $f(3) = -4$, $f(4) = 16 - 24 + 5 = -3$. La valeur en 3 est bien la plus petite des trois. ✔

Ce que la dérivée apporte de plus que la forme canonique : elle fonctionne pour TOUTES les fonctions, pas seulement pour les trinômes. C'est tout l'intérêt de l'outil.

Réponse. $f'(x) = 2x - 6$, négative avant 3 et positive après · f décroissante sur $]-\infty\,;3]$, croissante sur $[3\,;+\infty[$, minimum $f(3) = -4$.

Rappel de cours. $f' > 0 \to f$ croissante · $f' < 0 \to f$ décroissante · f' s'annule en changeant de signe → extremum.

Erreur fréquente. Étudier le signe de f au lieu de celui de f'. Ce sont deux tableaux différents : l'un donne les variations, l'autre la position par rapport à l'axe des abscisses.

Correction de l'exercice 9 – Tableau de variations d'une fonction cubique

Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

C'est un trinôme du second degré : on utilise les outils du chapitre 5 pour en étudier le signe.

On peut d'abord factoriser par 3 : $f'(x) = 3\left(x^2 - 2x - 3\right)$, ce qui allège les calculs.

Racines de $x^2 - 2x - 3$: $\Delta = 4 + 12 = 16$, donc $\sqrt{\Delta} = 4$ et les racines sont $\dfrac{2-4}{2} = -1$ et $\dfrac{2+4}{2} = 3$.

Contrôle : somme $-1 + 3 = 2$ ✔ et produit $-1 \times 3 = -3$ ✔.

Donc $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$. Comme le coefficient dominant est positif, f' est positive à l'extérieur des racines et négative entre elles.

Variations qui en découlent : f est croissante sur $]-\infty\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;3]$, puis croissante sur $[3\,;+\infty[$.

Extremum en $x = -1$: $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$. La dérivée passe du positif au négatif : c'est un MAXIMUM local, de valeur 10.

Extremum en $x = 3$: $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$. La dérivée passe du négatif au positif : c'est un MINIMUM local, de valeur -22.

Vérification numérique autour de -1 : $f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$ et $f(0) = 5$. Ces deux valeurs sont inférieures à 10. ✔

Vérification autour de 3 : $f(2) = 8 - 12 - 18 + 5 = -17$ et $f(4) = 64 - 48 - 36 + 5 = -15$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Ces deux valeurs sont supérieures à -22. ✔

Attention au vocabulaire : ces extremums sont LOCAUX. La fonction n'a ni maximum ni minimum global, puisqu'elle prend des valeurs arbitrairement grandes et arbitrairement petites.

Réponse. $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$ · croissante jusqu'à -1, décroissante de -1 à 3, croissante ensuite · maximum local $f(-1) = 10$, minimum local $f(3) = -22$.

Rappel de cours. Quand f' est un trinôme, on applique la règle du signe du second degré : signe de a à l'extérieur des racines, signe opposé entre elles.

Erreur fréquente. Annoncer un minimum en -1 et un maximum en 3 en se fiant aux valeurs ($10 > -22$). C'est le SENS DE CHANGEMENT du signe de f' qui décide, pas la comparaison des ordonnées.

Correction de l'exercice 10 – Lire une tangente sur un graphique

Lecture de $f(2)$: on part de $x = 2$, on monte jusqu'à la courbe, on lit 0. Donc $f(2) = 0$.

Pour le coefficient directeur de la tangente, on utilise deux de ses points bien placés : elle passe par $(2\,;0)$ et par $(3\,;2)$.

Coefficient directeur $= \dfrac{2-0}{3-2} = 2$. Autrement dit : quand on avance de 1, on monte de 2.

Or ce coefficient directeur est précisément le nombre dérivé, donc $f'(2) = 2$.

Vérification par le calcul : $f'(x) = 2x - 2$, donc $f'(2) = 4 - 2 = 2$. ✔

Équation de la tangente : $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 2(x-2) + 0$.

On développe : $y = 2x - 4$.

Contrôle sur le graphique : cette droite coupe l'axe des ordonnées en -4 et vaut 0 en $x = 2$. ✔ C'est bien la droite tracée.

Pour la tangente horizontale, on résout $f'(x) = 0$, soit $2x - 2 = 0$, donc $x = 1$.

Ordonnée correspondante : $f(1) = 1 - 2 = -1$. La tangente est donc horizontale au point $S(1\,;-1)$, qui est le sommet de la parabole.

On le voit directement sur le graphique : c'est le point le plus bas de la courbe, là où elle « change de sens ». ✔

Réponse. $f(2) = 0$ et $f'(2) = 2$, tangente d'équation $y = 2x - 4$ · la tangente est horizontale au sommet $S(1\,;-1)$.

Rappel de cours. Sur un graphique, le nombre dérivé se lit comme un coefficient directeur : on avance de 1 et on mesure la montée.

Erreur fréquente. Lire la pente sur la COURBE plutôt que sur la tangente. La courbe n'a pas de coefficient directeur : seule la droite tangente en a un.

Correction de l'exercice 11 – Volume maximal d'une boîte

Après découpe et pliage, la hauteur de la boîte vaut x, et le côté de la base vaut $20 - 2x$ — on retire x de chaque côté.

Volume : $V(x) = x(20-2x)^2$.

Domaine : il faut $x > 0$ et $20 - 2x > 0$, donc $x < 10$. Le problème a un sens sur $]0\,;10[$.

Pour dériver, on développe d'abord — c'est plus sûr que d'utiliser une règle de produit.

$(20-2x)^2 = 400 - 80x + 4x^2$, donc $V(x) = x\left(400 - 80x + 4x^2\right) = 400x - 80x^2 + 4x^3$.

Dérivée : $V'(x) = 400 - 160x + 12x^2$, qu'on écrit dans l'ordre décroissant :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$V'(x) = 12x^2 - 160x + 400$.

On factorise par 4 : $V'(x) = 4\left(3x^2 - 40x + 100\right)$.

Racines : $\Delta = 1\,600 - 1\,200 = 400$, donc $\sqrt{\Delta} = 20$ et les racines sont $\frac{40 - 20}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ et $\frac{40 + 20}{6} = 10$.

La racine 10 est exclue du domaine. Reste $x = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ cm.

Signe de V' sur $]0\,;10[$: le coefficient dominant 12 est positif, donc V' est positive avant $\frac{10}{3}$ et négative après (à l'intérieur des racines).

Le volume est donc croissant puis décroissant : $x = \frac{10}{3}$ donne bien un MAXIMUM.

Volume maximal : $V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{10}{3} \times \left(20 - \frac{20}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} \times \left(\frac{40}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} \times \frac{1\,600}{9} = \frac{16\,000}{27}$.

Soit environ 592,59 cm³, donc 593 cm³ au cm³ près.

Vérification par comparaison : $V(3) = 3 \times 14^2 = 588$ cm³ et $V(4) = 4 \times 12^2 = 576$ cm³. Les deux sont inférieurs à 592,59. ✔

Réponse. $V(x) = x(20 - 2x)^2$ sur $]0\,;10[$ · $V'(x) = 4(3x^2 - 40x + 100)$, qui s'annule en $x = \frac{10}{3}$ cm · volume maximal $\frac{16\,000}{27} \approx 593$ cm³.

Rappel de cours. Optimiser = dériver, résoudre $f'(x) = 0$, étudier le SIGNE de f' pour confirmer qu'il s'agit bien d'un maximum, puis calculer la valeur.

Erreur fréquente. Écrire le côté de la base $20 - x$. On découpe un carré à CHAQUE extrémité : il faut retrancher x deux fois.

Correction de l'exercice 12 – Coût marginal toujours croissant

Dérivée : $C'(x) = 3x^2 - 12x + 15$.

Pour montrer que C est croissante, il suffit de montrer que C' est strictement positive sur l'intervalle.

C' est un trinôme du second degré : on calcule son discriminant.

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 15 = 144 - 180 = -36$.

Comme $\Delta < 0$, le trinôme n'a aucune racine : il ne change JAMAIS de signe.

Il est donc toujours du signe de son coefficient dominant $a = 3 > 0$, c'est-à-dire strictement positif.

Conclusion : $C'(x) > 0$ sur $[0\,;20]$, donc le coût total C est strictement croissant. C'est économiquement logique : produire davantage coûte toujours plus cher au total.

Vérification numérique : $C'(0) = 15 > 0$, $C'(2) = 12 - 24 + 15 = 3 > 0$, $C'(5) = 75 - 60 + 15 = 30 > 0$. ✔

Pour la dernière question, on cherche le minimum de C', qui est un trinôme de coefficient dominant positif : son minimum est atteint au sommet.

Abscisse du sommet : $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{6} = 2$.

Valeur : $C'(2) = 3$ €. Le coût marginal est donc minimal pour une production de 2 articles, où il vaut 3 € par article supplémentaire.

Interprétation économique : au début, chaque article supplémentaire coûte de moins en moins cher (effet d'échelle) ; à partir de 2 articles, il coûte de plus en plus cher

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

(saturation de l'outil de production).

Contrôle de cohérence : $C'(1) = 3 - 12 + 15 = 6$ et $C'(3) = 27 - 36 + 15 = 6$. Ces deux valeurs encadrent bien le minimum 3 et sont symétriques autour de $x = 2$. ✔

Réponse. $C'(x) = 3x^2 - 12x + 15$ · $\Delta = -36 < 0$ et $a > 0$ donc $C' > 0$: C est strictement croissante · le coût marginal est minimal en $x = 2$, où il vaut 3 €.

Rappel de cours. Un trinôme de discriminant négatif garde le signe de a sur $\mathbb{R}$: c'est l'argument standard pour prouver qu'une dérivée ne s'annule pas.

Erreur fréquente. Conclure « $\Delta < 0$ donc on ne peut rien dire ». C'est au contraire l'information la plus forte : aucun changement de signe possible.

Correction de l'exercice 13 – Tangente parallèle à une droite

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le MÊME coefficient directeur.

La droite $y = x + 4$ a pour coefficient directeur 1.

On cherche donc l'abscisse a telle que $f'(a) = 1$.

Dérivée : $f'(x) = 2x - 3$.

Équation à résoudre : $2a - 3 = 1$, donc $2a = 4$ et $a = 2$.

Ordonnée du point : $f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$. Le point cherché est $A(2\,;-1)$.

Équation de la tangente : $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 1 \times (x - 2) + (-1)$.

On développe : $y = x - 3$.

Vérification du parallélisme : cette tangente a bien pour coefficient directeur 1, comme la droite donnée. ✔ Et elle en est distincte, puisque les ordonnées à l'origine diffèrent (-3 contre 4).

Vérification du point de contact : pour $x = 2$, la tangente donne $y = -1$, ce qui correspond à $f(2)$. ✔

Unicité : l'équation $2a - 3 = 1$ est du premier degré, elle n'a qu'une solution. Il existe donc un seul point de la parabole où la tangente a cette direction — ce qui est logique, la pente d'une parabole étant strictement croissante.

Réponse. Le point est $A(2\,;-1)$ et la tangente a pour équation $y = x - 3$.

Rappel de cours. « Tangente parallèle à une droite de coefficient m » se traduit immédiatement par l'équation $f'(x) = m$.

Erreur fréquente. Résoudre $f(x) = x + 4$ au lieu de $f'(x) = 1$. Cela donnerait les points d'INTERSECTION avec la droite, une tout autre question.

Correction de l'exercice 14 – Extremums d'une fonction cubique

Une tangente horizontale correspond à un nombre dérivé nul : on résout donc $f'(x) = 0$.

Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Ici, pas besoin de discriminant : on factorise directement par $3x$.

$f'(x) = 3x(x - 2)$, donc $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = 2$.

Ordonnées correspondantes : $f(0) = 2$ et $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$.

Les tangentes sont donc horizontales aux points $A(0\,;2)$ et $B(2\,;-2)$, d'équations respectives $y = 2$ et $y = -2$.

Pour la nature des extremums, on étudie le signe de $f'(x) = 3x(x - 2)$, trinôme de coefficient dominant positif, de racines 0 et 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

f' est donc positive avant 0, négative entre 0 et 2, positive après 2.

En $x = 0$, la dérivée passe du POSITIF au NÉGATIF : la fonction monte puis descend, c'est un MAXIMUM local, de valeur 2.

En $x = 2$, la dérivée passe du NÉGATIF au POSITIF : c'est un MINIMUM local, de valeur -2.

Vérification numérique autour de 0 : $f(-1) = -1 - 3 + 2 = -2$ et $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. Les deux sont inférieurs à 2. ✔

Vérification autour de 2 : $f(1) = 0$ et $f(3) = 27 - 27 + 2 = 2$. Les deux sont supérieurs à -2. ✔

Mise en garde : une tangente horizontale ne garantit PAS un extremum. Pour $g(x) = x^3$, on a $g'(0) = 0$ alors que la fonction est croissante partout — la dérivée s'annule sans changer de signe.

Réponse. Tangentes horizontales en $A(0\,;2)$ et $B(2\,;-2)$ · maximum local 2 en $x = 0$, minimum local -2 en $x = 2$.

Rappel de cours. Extremum $\Leftrightarrow$ f' s'annule EN CHANGEANT DE SIGNE. L'annulation seule ne suffit pas (contre-exemple : x^3 en 0).

Erreur fréquente. Utiliser le discriminant sur $3x^2 - 6x$. Une factorisation par $3x$ est immédiate : chercher Δ fait perdre du temps et augmente le risque d'erreur.

Correction de l'exercice 15 – Position, vitesse et sens de déplacement

Vitesse : $v(t) = d'(t) = 3t^2 - 12t + 9$.

On factorise par 3 : $v(t) = 3\left(t^2 - 4t + 3\right)$.

Racines de $t^2 - 4t + 3$: $\Delta = 16 - 12 = 4$, donc $\sqrt{\Delta} = 2$ et les racines sont $\dfrac{4-2}{2} = 1$ et $\dfrac{4+2}{2} = 3$.

Contrôle : somme $1 + 3 = 4$ ✔ et produit $1 \times 3 = 3$ ✔. Donc $v(t) = 3(t-1)(t-3)$.

Le mobile s'arrête lorsque sa vitesse est nulle, c'est-à-dire aux instants $t = 1$ s et $t = 3$ s.

Signe de v : coefficient dominant positif, donc v est positive à l'extérieur des racines et négative entre elles.

Sur $[0\,;1[$: $v > 0$, le mobile AVANCE (la position augmente).

Sur $]1\,;3[$: $v < 0$, le mobile RECULE (la position diminue).

Sur $]3\,;5]$: $v > 0$, le mobile avance de nouveau.

Positions aux instants clés : $d(0) = 0$, $d(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ m, $d(3) = 27 - 54 + 27 = 0$ m, $d(5) = 125 - 150 + 45 = 20$ m.

Récit complet du mouvement : le mobile part de l'origine, avance jusqu'à 4 m en 1 s, s'arrête, revient à son point de départ à $t = 3$ s, s'arrête de nouveau, puis repart pour atteindre 20 m à $t = 5$ s.

Vérification de cohérence : la distance PARCOURUE vaut $4 + 4 + 20 = 28$ m, alors que le DÉPLACEMENT (position finale moins initiale) ne vaut que 20 m. L'écart correspond exactement à l'aller-retour. ✔

À retenir : le signe de la dérivée d'une position donne le SENS du déplacement, et son annulation les instants d'arrêt.

Réponse. $v(t) = 3(t-1)(t-3)$ · le mobile s'arrête à $t = 1$ s et $t = 3$ s · il avance sur $[0\,;1[$, recule sur $]1\,;3[$, avance sur $]3\,;5]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. La vitesse est la dérivée de la position. Vitesse positive → on avance · négative → on recule · nulle → arrêt (au moins instantané).

Erreur fréquente. Conclure que le mobile « recule » parce que $d(3) = 0$. C'est le signe de v, pas la valeur de d, qui indique le sens du déplacement.

Correction de l'exercice 16 – Dériver une exponentielle

Dérivée terme à terme : $h'(x) = e^x - 1$.

Pour étudier son signe, on résout $e^x - 1 = 0$, soit $e^x = 1 = e^0$, donc $x = 0$.

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante (chapitre 4), $e^x < 1$ pour $x < 0$ et $e^x > 1$ pour $x > 0$.

Donc $h'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0[$ et $h'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

Variations : h est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, puis croissante sur $[0\,;+\infty[$.

La dérivée s'annule en changeant de signe (du négatif au positif) : h admet donc un MINIMUM en $x = 0$.

Valeur de ce minimum : $h(0) = e^0 - 0 = 1$.

Vérification numérique : $h(1) = e - 1 \approx 1{,}718$ et $h(-1) = e^{-1} + 1 \approx 1{,}368$. Les deux sont bien supérieurs à 1. ✔

Pour la dernière question : puisque 1 est le minimum de h, on a $h(x) \geq 1$ pour tout réel x.

Autrement dit $e^x - x \geq 1$, donc en ajoutant x aux deux membres : $e^x \geq x + 1$.

L'inégalité est démontrée pour TOUT réel x, avec égalité uniquement en $x = 0$.

Interprétation géométrique : la droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente à la courbe de l'exponentielle au point $(0\,;1)$, et la courbe reste toujours au-dessus de cette tangente.

Vérification de cette lecture : la tangente en 0 a pour équation $y = \left(e^0\right)(x - 0) + e^0 = x + 1$. ✔ C'est bien la droite de l'inégalité.

Réponse. $h'(x) = e^x - 1$, négative avant 0, positive après · h décroît puis croît, minimum $h(0) = 1$ · donc $e^x - x \geq 1$, c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$ pour tout x.

Rappel de cours. Pour démontrer une inégalité, on étudie la fonction « membre de gauche moins membre de droite » et on montre que son minimum est positif ou nul.

Erreur fréquente. Écrire $(e^x)' = x\,e^{x-1}$ en appliquant la règle des puissances. Cette règle vaut pour x^n, où c'est la BASE qui varie — ici, c'est l'exposant.

Correction de l'exercice 17 – Enclos contre un mur

Le grillage couvre trois côtés : deux côtés de longueur x et un côté parallèle au mur.

Donc $2x$ + côté parallèle = 60, d'où côté parallèle = $60 - 2x$.

Aire : $A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$.

Domaine : $x > 0$ et $60 - 2x > 0$, donc $x < 30$. Le problème a un sens sur $]0\,;30[$.

Dérivée : $A'(x) = 60 - 4x$.

On résout $A'(x) = 0$: $60 - 4x = 0$, donc $x = 15$.

Signe de A' : c'est une expression affine décroissante, positive avant 15 et négative après. L'aire croît puis décroît : $x = 15$ donne bien un MAXIMUM.

Dimensions optimales : $x = 15$ m pour les côtés perpendiculaires, et $60 - 30 = 30$ m pour le côté parallèle au mur.

Aire maximale : $A(15) = 15 \times 30 = 450$ m².

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Vérification par comparaison : $A(14) = 14 \times 32 = 448$ m² et $A(16) = 16 \times 28 = 448$ m². Les deux sont inférieurs à 450. ✔

Pour la comparaison finale : avec 60 m de grillage sur QUATRE côtés, le demi-périmètre vaut 30, et l'aire $x(30 - x)$ est maximale pour $x = 15$, soit un carré de 15 m de côté et une aire de 225 m².

L'enclos adossé au mur offre donc 450 m² contre 225 m² : exactement le DOUBLE, à quantité de grillage égale.

Interprétation : le mur remplace gratuitement l'un des côtés, ce qui permet d'agrandir considérablement la surface. C'est pour cette raison que l'enclos optimal n'est pas un carré ici, mais un rectangle deux fois plus long que large.

Réponse. Côté parallèle = $60 - 2x$ et $A(x) = 60x - 2x^2$ · aire maximale de 450 m² pour 15 m sur 30 m · c'est le double des 225 m² d'un enclos carré entièrement clôturé.

Rappel de cours. Dans un problème d'optimisation, la contrainte (ici le grillage) sert à exprimer une dimension en fonction de l'autre, pour n'avoir plus qu'une seule variable.

Erreur fréquente. Compter quatre côtés alors que le mur en remplace un. On écrirait $2x + 2y = 60$ et l'on trouverait 225 m², c'est-à-dire la réponse à l'autre question.

Correction de l'exercice 18 – Nombre de solutions d'une équation

Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3(x - 1)(x + 1)$.

Racines de f' : $x = -1$ et $x = 1$. Coefficient dominant positif, donc f' est positive à l'extérieur et négative entre.

Variations : f est croissante sur $]-\infty\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;1]$, puis croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Extremums : $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ (maximum local) et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$ (minimum local).

Pour compter les solutions de $f(x) = 0$, on examine chaque branche du tableau et sa position par rapport à 0.

Sur $]-\infty\,;-1]$, la fonction croît de valeurs très négatives jusqu'à 3. Comme $3 > 0$, elle traverse 0 une fois : PREMIÈRE solution.

Sur $[-1\,;1]$, elle décroît de 3 à -1. Elle change de signe, donc elle traverse 0 : DEUXIÈME solution.

Sur $[1\,;+\infty[$, elle croît de -1 vers des valeurs très grandes. Elle traverse encore 0 : TROISIÈME solution.

L'équation admet donc exactement TROIS solutions, ce que confirme le graphique : la courbe coupe l'axe des abscisses en trois points.

Encadrements par balayage. Première solution : $f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1 < 0$ et $f(-1{,}8) = -5{,}832 + 5{,}4 + 1 = 0{,}568 > 0$, donc elle est entre $-1{,}9$ et $-1{,}8$.

Affinage : $f(-1{,}9) = -6{,}859 + 5{,}7 + 1 = -0{,}159 < 0$, ce qui confirme l'encadrement $-1{,}9 < x_1 < -1{,}8$.

Deuxième solution : $f(0{,}3) = 0{,}027 - 0{,}9 + 1 = 0{,}127 > 0$ et $f(0{,}4) = 0{,}064 - 1{,}2 + 1 = -0{,}136 < 0$, donc $0{,}3 < x_2 < 0{,}4$.

Troisième solution : $f(1{,}5) = 3{,}375 - 4{,}5 + 1 = -0{,}125 < 0$ et $f(1{,}6) = 4{,}096 - 4{,}8 + 1 = 0{,}296 > 0$, donc $1{,}5 < x_3 < 1{,}6$.

Contrôle graphique : les trois racines lues sur la figure se situent bien vers $-1{,}9$, 0,35 et 1,5. ✔

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Croissante puis décroissante puis croissante, avec maximum local 3 en -1 et minimum local -1 en 1 · l'équation $f(x) = 0$ a exactement trois solutions · $-1{,}9 < x_1 < -1{,}8$, $0{,}3 < x_2 < 0{,}4$ et $1{,}5 < x_3 < 1{,}6$.

Rappel de cours. Le tableau de variations donne le NOMBRE de solutions : sur chaque branche monotone, la fonction traverse une valeur au plus une fois.

Erreur fréquente. Répondre « une seule solution » parce que la fonction est cubique et « ressemble » à x^3. Ce sont les signes des extremums locaux ($3 > 0$ et $-1 < 0$) qui garantissent les trois traversées.

Correction de l'exercice 19 – Retrouver le point de contact

On ne connaît pas le point de contact : on le nomme donc a et on écrit l'équation de la tangente en fonction de ce paramètre.

$f(a) = a^2$ et $f'(x) = 2x$, donc $f'(a) = 2a$.

Équation de la tangente : $y = 2a(x - a) + a^2$.

On développe : $y = 2ax - 2a^2 + a^2 = 2ax - a^2$.

Cette droite doit passer par $B(0\,;-1)$: on remplace donc x par 0 et y par -1.

$-1 = 2a \times 0 - a^2$, soit $-1 = -a^2$, donc $a^2 = 1$.

Cette équation a DEUX solutions : $a = 1$ et $a = -1$. Il existe donc deux tangentes répondant à la question.

Première tangente, pour $a = 1$: $y = 2x - 1$, touchant la courbe au point $(1\,;1)$.

Seconde tangente, pour $a = -1$: $y = -2x - 1$, touchant la courbe au point $(-1\,;1)$.

Vérification que la première passe par B : pour $x = 0$, $y = -1$. ✔ Et pour la seconde : $y = -1$ également. ✔

Vérification des points de contact : $f(1) = 1$ ✔ et $f(-1) = 1$ ✔.

Interprétation géométrique : le point B est situé SOUS la parabole, à l'extérieur de la région qu'elle délimite. Depuis un tel point, on peut toujours mener exactement deux tangentes, symétriques par rapport à l'axe de la parabole.

Point de méthode à retenir : quand le point de contact est inconnu, on l'appelle a, on écrit la tangente générique, puis on traduit la condition imposée. C'est la seule difficulté de ce type d'exercice.

Réponse. $a = 1$ ou $a = -1$, donnant les tangentes $y = 2x - 1$ et $y = -2x - 1$, de points de contact $(1\,;1)$ et $(-1\,;1)$.

Rappel de cours. Tangente générique en un point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. On garde a comme inconnue et on résout la condition demandée.

Erreur fréquente. Croire que $B(0\,;-1)$ est le point de contact et calculer $f'(0) = 0$. Le point donné est un point PAR LEQUEL passe la tangente, pas celui où elle touche la courbe.

Correction de l'exercice 20 – Synthèse : étude d'une fonction sur un intervalle

Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

On factorise par 3 : $f'(x) = 3\left(x^2 - 4x + 3\right)$.

Racines : $\Delta = 16 - 12 = 4$, donc $\sqrt{\Delta} = 2$ et les racines sont $\dfrac{4-2}{2} = 1$ et $\dfrac{4+2}{2} = 3$.

Contrôle : somme $1 + 3 = 4$ ✔ et produit 3 ✔. Donc $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Signe : coefficient dominant positif, donc f' est positive sur $[0\,;1[$, négative sur $]1\,;3[$, positive sur $]3\,;5]$.

Variations : f croît sur $[0\,;1]$, décroît sur $[1\,;3]$, puis croît sur $[3\,;5]$.

Valeurs aux points clés : $f(0) = 1$; $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$; $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$; $f(5) = 125 - 150 + 45 + 1 = 21$.

Sur un intervalle FERMÉ, les extremums globaux se cherchent parmi les extremums locaux ET les bornes : il faut donc comparer les quatre valeurs 1, 5, 1 et 21.

Maximum de f sur $[0\,;5]$: 21, atteint en $x = 5$ — c'est-à-dire à une BORNE, et non au maximum local 5 obtenu en $x = 1$.

Minimum de f sur $[0\,;5]$: 1, atteint deux fois, en $x = 0$ et en $x = 3$.

Pour la tangente : $f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$.

Pente : $f'(2) = 3(2 - 1)(2 - 3) = 3 \times 1 \times (-1) = -3$.

Équation : $y = -3(x - 2) + 3 = -3x + 6 + 3$, soit $y = -3x + 9$.

Vérification au point de contact : pour $x = 2$, $y = -6 + 9 = 3$. ✔ Cela correspond bien à $f(2)$.

Cohérence globale : $x = 2$ se situe dans la phase décroissante, et la pente trouvée est effectivement négative. ✔ Le graphique confirme que la tangente descend.

Réponse. $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ · croissante sur $[0\,;1]$, décroissante sur $[1\,;3]$, croissante sur $[3\,;5]$ · maximum 21 en $x = 5$, minimum 1 atteint en $x = 0$ et $x = 3$ · tangente en 2 : $y = -3x + 9$.

Rappel de cours. Sur un intervalle fermé, les extremums GLOBAUX peuvent se situer aux bornes. On compare toujours les valeurs aux extremums locaux ET aux extrémités.

Erreur fréquente. Annoncer que le maximum vaut 5 parce que c'est le maximum local. Sur $[0\,;5]$, la valeur en $x = 5$ vaut 21 : c'est elle le maximum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).