Dérivation — Première générale

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Dériver, c'est mesurer une pente. Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a : c'est la vitesse à laquelle la fonction varie à cet instant précis. Ces 20 exercices partent du taux de variation entre deux points, le font tendre vers le nombre dérivé, puis installent les formules usuelles et l'équation de tangente. La seconde moitié exploite le résultat central du chapitre — le SIGNE de f' donne les variations de f — pour dresser des tableaux de variations et résoudre de vrais problèmes d'optimisation : volume d'une boîte, aire d'un enclos, coût de production, trajectoire d'un mobile.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-generale/derivation

Exercice 1 – Du taux de variation au nombre dérivé

Soit $f(x) = x^2$. Calcule le taux de variation de f entre 1 et 3, puis entre 1 et 1,1, puis entre 1 et 1,01. Que semble-t-il se passer ?

Exercice 2 – Les dérivées usuelles

Donne la dérivée de chacune de ces fonctions de référence : $f(x) = 5$; $g(x) = 3x$; $h(x) = x^2$; $k(x) = x^3$; $m(x) = \frac{1}{x}$; $n(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 3 – Dériver un polynôme

Calcule la dérivée de chaque fonction, puis la valeur demandée.

1. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$; calcule $f'(1)$.

2. $g(x) = x^3 - 4x + 7$; calcule $g'(2)$.

3. $h(x) = -2x^2 + x$; calcule $h'(0)$.

Exercice 4 – Nombre dérivé et pente de la tangente

Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Calcule $f'(x)$, puis $f'(3)$, $f'(1)$ et $f'(0)$. Interprète chaque résultat en termes de tangente.

Exercice 5 – Première équation de tangente

Soit $f(x) = x^2$. Détermine l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Exercice 6 – Tangentes à une courbe cubique

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Détermine les équations des tangentes à la courbe aux points d'abscisses -1 puis 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Dériver avec une racine et une fraction

Soit $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{3}{x}$, définie pour $x > 0$. Calcule $f'(x)$, puis $f'(1)$ et $f'(4)$.

Exercice 8 – Signe de la dérivée et variations

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Étudie le signe de $f'(x)$ et déduis-en le tableau de variations de f.

Exercice 9 – Tableau de variations d'une fonction cubique

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ et précise les extremums locaux.

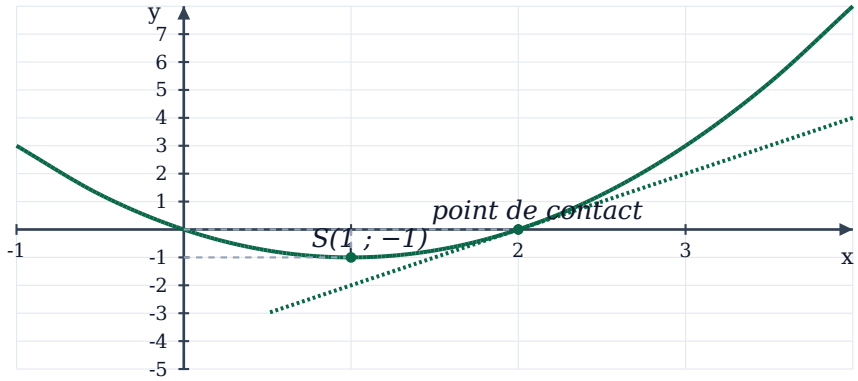
Exercice 10 – Lire une tangente sur un graphique

La courbe ci-dessous est celle de $f(x) = x^2 - 2x$ (trait plein), tracée avec sa tangente au point d'abscisse 2 (pointillés).

1. Lis graphiquement $f(2)$ et le coefficient directeur de la tangente, puis donne $f'(2)$.

2. Retrouve l'équation de cette tangente par le calcul.

3. En quel point la tangente à la courbe est-elle horizontale ?



Exercice 11 – Volume maximal d'une boîte

Dans une plaque de carton carrée de 20 cm de côté, on découpe un carré de côté x à chaque coin, puis on relève les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Exprime le volume $V(x)$ de la boîte, et précise pour quelles valeurs de x le problème a un sens.

2. Calcule $V'(x)$ et détermine la valeur de x qui rend le volume maximal.

3. Donne ce volume maximal au cm³ près.

Exercice 12 – Coût marginal toujours croissant

Le coût total de production, en euros, de x articles est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, pour x entre 0 et 20. Le coût marginal est modélisé par $C'(x)$.

1. Calcule $C'(x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Montre que le coût total est strictement croissant sur $[0\,;20]$.

3. Le coût marginal admet-il un minimum ? Si oui, pour quelle production ?

Exercice 13 – Tangente parallèle à une droite

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Détermine le point de la courbe où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 4$, puis donne l'équation de cette tangente.

Exercice 14 – Extremums d'une fonction cubique

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Détermine les points où la tangente est horizontale, puis précise la nature de chaque extremum.

Exercice 15 – Position, vitesse et sens de déplacement

Un mobile se déplace sur un axe. Sa position, en mètres, à l'instant t (en secondes) est $d(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, pour $t \in [0\,;5]$. Sa vitesse est donnée par $v(t) = d'(t)$.

1. Calcule $v(t)$ et factorise-la.

2. À quels instants le mobile s'arrête-t-il ?

3. Décris le mouvement : quand avance-t-il, quand recule-t-il ?

Exercice 16 – Dériver une exponentielle

On admet que la fonction exponentielle est sa propre dérivée : $(e^x)' = e^x$. Soit $h(x) = e^x - x$.

1. Calcule $h'(x)$ et étudie son signe.

2. Dresse le tableau de variations de h et donne son minimum.

3. Déduis-en que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x.

Exercice 17 – Enclos contre un mur

On veut clôturer un enclos rectangulaire adossé à un mur : le mur constitue l'un des grands côtés, et l'on ne grillage que les trois autres côtés. On dispose de 60 m de grillage et l'on note x la longueur de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

1. Exprime la longueur du côté parallèle au mur, puis l'aire $A(x)$.

2. Détermine les dimensions qui rendent l'aire maximale, et cette aire.

3. Compare avec le cas d'un enclos entièrement clôturé avec les mêmes 60 m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

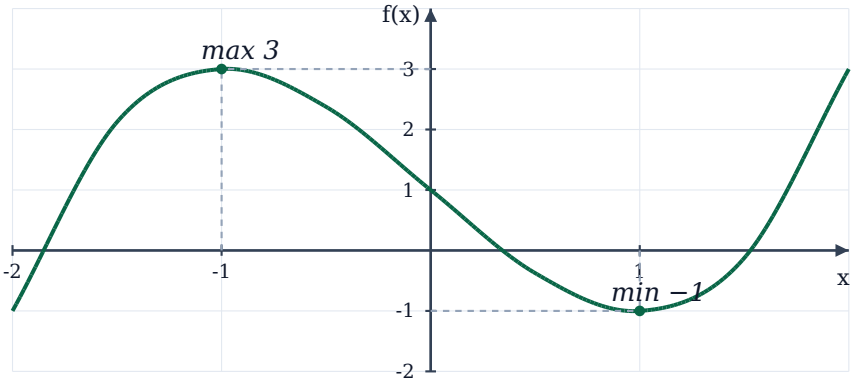
Exercice 18 – Nombre de solutions d'une équation

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$, représentée ci-dessous.

1. Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déduis-en le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Donne un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune de ces solutions.



Exercice 19 – Retrouver le point de contact

Soit $f(x) = x^2$. Détermine les abscisses a pour lesquelles la tangente à la courbe au point d'abscisse a passe par le point $B(0\,;-1)$.

Exercice 20 – Synthèse : étude d'une fonction sur un intervalle

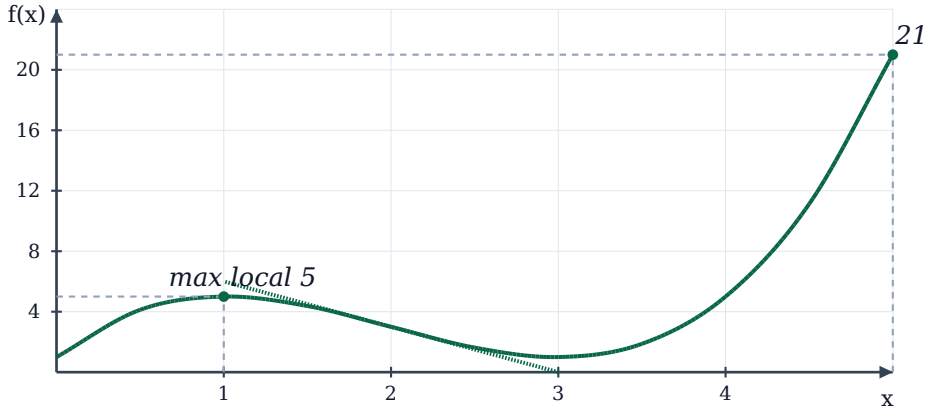
Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, étudiée sur $[0\,;5]$ et représentée ci-dessous avec sa tangente au point d'abscisse 2.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise-la.

2. Dresse le tableau de variations de f sur $[0\,;5]$.

3. Donne le maximum et le minimum de f sur cet intervalle.

4. Détermine l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).