Fonction exponentielle — Première générale

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La fonction exponentielle transforme les additions en multiplications : $e^{a+b} = e^a \times e^b$. Toutes les règles de calcul du chapitre en découlent, et il n'y en a que trois à connaître. Ces 20 exercices commencent par les manipuler jusqu'à l'automatisme, puis exploitent les deux propriétés qui servent partout : e^x est TOUJOURS strictement positif, et la fonction est strictement croissante — ce qui permet de résoudre équations et inéquations en comparant simplement les exposants. La seconde moitié est consacrée à la modélisation : croissance de population, refroidissement, capitalisation, avec à chaque fois le lien avec les suites géométriques du chapitre 3, dont l'exponentielle est la version continue.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-generale/fonction-exponentielle

Exercice 1 – Premières valeurs et notation

Donne la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième, de e^0, e^1, e^2, e^{-1} et $e^{0,5}$. Précise ensuite le signe de e^x selon les valeurs de x.

Exercice 2 – Règle du produit

Simplifie chaque expression sous la forme e^k ou $e^{\text{expression}}$: $e^3 \times e^5$; $e^x \times e^2$; $e^{2x} \times e^{3x}$; $e^a \times e^{-a}$; $e^{x+1} \times e^{x-1}$.

Exercice 3 – Quotient et inverse

Simplifie : $\dfrac{e^7}{e^4}$; $\dfrac{1}{e^x}$; $\dfrac{e^{5x}}{e^{2x}}$; $\dfrac{e^{-3}}{e^{-5}}$; $\dfrac{e^{2x+1}}{e^x}$.

Exercice 4 – Puissance d'une exponentielle

Simplifie : $\left(e^2\right)^3$; $(e^x)^4$; $(e^{-x})^3$; $\left(e^{0,5}\right)^2$; $\left(e^{x+1}\right)^2$.

Exercice 5 – Signe et sens de variation

Réponds en justifiant : e^{-4} est-il positif ou négatif ? Quel est le plus grand de e^2 et e^3 ? Et de e^{-5} et e^{-2} ? Pour quelles valeurs de x a-t-on $e^x > 1$?

Exercice 6 – Simplifier des expressions combinées

Simplifie au maximum, en écrivant le résultat sous la forme $e^{\text{expression}}$.

1. $A = \dfrac{e^{2x} \times e^3}{e^x}$

2. $B = (e^x)^2 \times e^{-3x}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. $C = \dfrac{e^{x+1}}{e^{2x-1}}$

4. $D = \dfrac{e^{2x} \times e^{-x}}{(e^{x})^{3}}$

Exercice 7 – Résoudre une équation

Résous dans $\mathbb{R}$: $e^{x} = e^{5}$; $e^{2x-1} = e^{x+3}$; $e^{3x} = 1$; $e^{x^2} = e^{4}$.

Exercice 8 – Résoudre une inéquation

Résous dans $\mathbb{R}$: $e^{x} > e^{3}$; $e^{2x-1} \leq e^{5}$; $e^{-x} > 1$; $e^{x} > -2$.

Exercice 9 – Factoriser pour déterminer un signe

On considère l'expression $f(x) = e^{2x} + e^{x}$.

1. Factorise $f(x)$ par e^{x}.

2. Déduis-en le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Résous ensuite l'équation $e^{2x} - e^{x} = 0$.

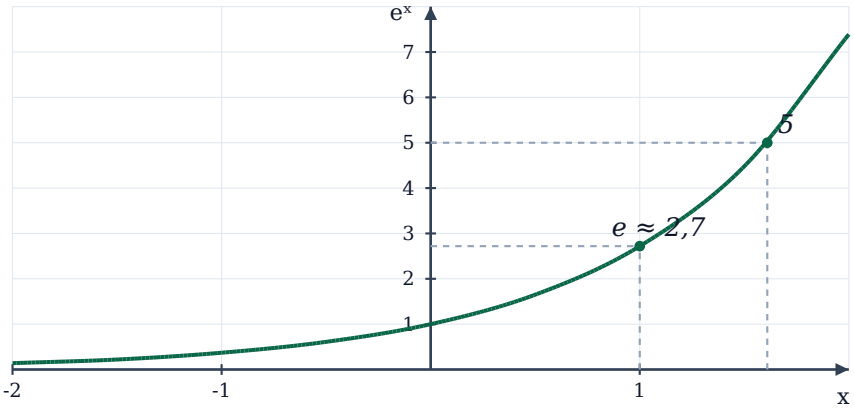
Exercice 10 – Lecture graphique de la courbe

La courbe ci-dessous est celle de la fonction $f(x) = e^{x}$.

1. Lis les valeurs approchées de e^{1} et e^{2}.

2. Résous graphiquement l'équation $e^{x} = 5$.

3. La courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifie.



Exercice 11 – Croissance exponentielle et taux annuel

Une population de bactéries est modélisée par $f(t) = 200\,e^{0{,}05t}$, où t est le temps en heures.

1. Calcule la population initiale, puis après 10 h et après 20 h.

2. Calcule le rapport $\dfrac{f(t+1)}{f(t)}$ et interprète-le.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Quel est le pourcentage d'augmentation par heure ?

Exercice 12 – Décroissance et demi-vie

La masse d'un échantillon radioactif, en grammes, est donnée par $M(t) = 80\,e^{-0{,}03t}$, où t est le temps en années.

1. Calcule la masse initiale et la masse au bout de 10 ans.

2. Justifie que la masse est décroissante.

3. Détermine, par balayage, la demi-vie de l'échantillon (temps au bout duquel il ne reste que la moitié de la masse initiale).

Exercice 13 – Équation avec changement d'inconnue

Résous l'équation $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$.

Exercice 14 – Modèle de population et taux équivalent

La population d'une ville, en habitants, est modélisée par $N(t) = 1\,500\,e^{0{,}08t}$, où t est le nombre d'années écoulées depuis 2026.

1. Calcule la population en 2027 et en 2031.

2. Quel est le taux d'évolution annuel de ce modèle, à 0,01 % près ?

3. Écris la population sous la forme $N(t) = 1\,500 \times q^{t}$ et donne q.

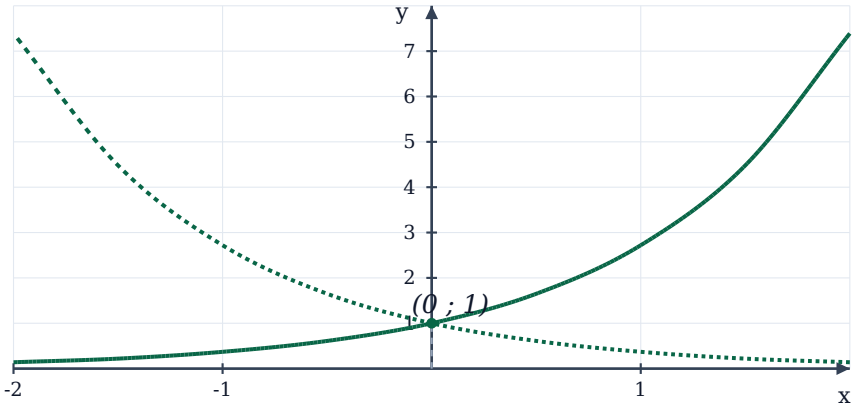
Exercice 15 – Deux courbes symétriques

On considère $f(x) = e^{x}$ (trait plein) et $g(x) = e^{-x}$ (pointillés), représentées ci-dessous.

1. Calcule $f(x) \times g(x)$ et interprète le résultat.

2. Montre que $g(x) = f(-x)$ et explique la symétrie observée.

3. Résous l'équation $f(x) = g(x)$.



Exercice 16 – Intérêts annuels ou croissance continue

Une banque propose deux formules pour placer 5 000 € : la formule A capitalise 4 % une fois par an, le capital vaut donc $A_n = 5\,000 \times 1{,}04^{\,n}$ après n années ; la formule B applique une croissance continue au même coefficient, le capital vaut

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$B(t) = 5\,000\,e^{0{,}04t}$ après t années.

1. Compare les capitaux au bout de 10 ans.

2. Quel est le taux annuel réel de la formule B ?

3. Explique pourquoi B rapporte davantage, et de combien au bout de 20 ans.

Exercice 17 – Équation produit et signe de l'exponentielle

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $(e^x - 2)(e^x + 3) = 0$, puis l'inéquation $(e^x - 2)(e^x + 3) > 0$.

Exercice 18 – Refroidissement d'une boisson

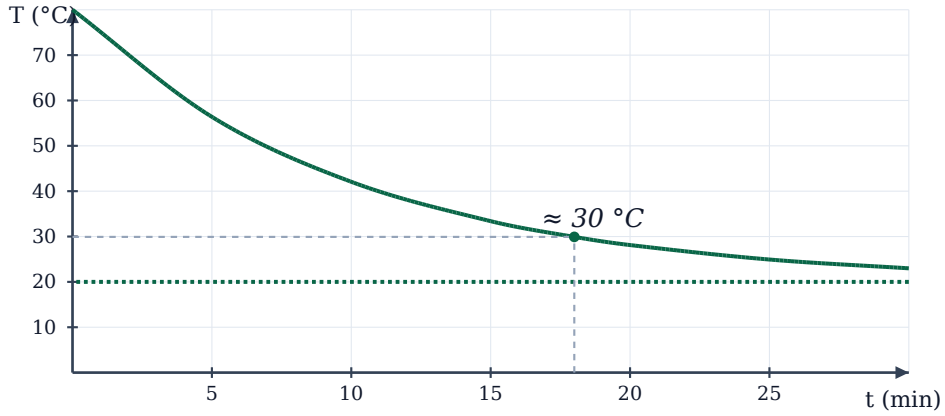
La température d'une boisson chaude, en degrés Celsius, est modélisée par $T(t) = 20 + 60\,e^{-0{,}1t}$, où t est le temps en minutes. Le graphique représente cette évolution ; la droite en pointillés a pour équation $y = 20$.

1. Quelle est la température initiale ?

2. Calcule la température au bout de 10 minutes, puis de 20 minutes.

3. Vers quelle température tend la boisson ? Interprète la droite en pointillés.

4. Au bout de combien de minutes la boisson passe-t-elle sous 30 °C ?



Exercice 19 – Une identité à démontrer

Montre que, pour tout réel x, $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

Exercice 20 – Synthèse : croissance d'une audience

Le nombre d'abonnés d'une chaîne est modélisé par $A(t) = 12\,000\,e^{0{,}15t}$, où t est le nombre de mois écoulés.

1. Calcule le nombre d'abonnés au bout d'un mois, puis de six mois.

2. Détermine le taux de croissance mensuel, puis écris $A(t)$ sous la forme $12\,000 \times q^t$.

3. Au bout de combien de mois la chaîne dépassera-t-elle 50 000 abonnés ?

4. Le modèle prévoit-il un nombre d'abonnés réaliste au bout de deux ans ? Commente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Premières valeurs et notation

Le nombre e est une constante, comme π : $e \approx 2{,}718$. La touche de la calculatrice est notée e^x ou exp.

$e^0 = 1$. C'est une valeur exacte à connaître : toute puissance d'exposant nul vaut 1, et l'exponentielle ne fait pas exception.

$e^1 = e \approx 2{,}718$.

$e^2 \approx 7{,}389$. On peut le retrouver comme $e \times e \approx 2{,}718 \times 2{,}718 \approx 7{,}389$. ✔

$e^{-1} = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}368$. Un exposant négatif donne l'inverse, donc un nombre compris entre 0 et 1.

Vérification : $e^1 \times e^{-1} \approx 2{,}718 \times 0{,}368 \approx 1$. ✔ C'est cohérent, puisque $e^1 \times e^{-1} = e^0 = 1$.

$e^{0,5} = \sqrt{e} \approx 1{,}649$, car $e^{0,5} \times e^{0,5} = e^1 = e$.

Signe : $e^x > 0$ pour TOUTE valeur de x, sans aucune exception. Même avec un exposant très négatif, le résultat reste strictement positif — simplement très petit.

Exemple : $e^{-10} \approx 0{,}0000454$. C'est minuscule, mais ce n'est pas zéro, et ce n'est surtout pas négatif.

Conséquence à retenir pour tout le chapitre : une équation comme $e^x = -2$ n'a AUCUNE solution, et une expression e^x peut toujours être divisée ou simplifiée sans condition.

Réponse. $e^0 = 1$; $e^1 \approx 2{,}718$; $e^2 \approx 7{,}389$; $e^{-1} \approx 0{,}368$; $e^{0,5} \approx 1{,}649$. Et $e^x > 0$ quel que soit x.

Rappel de cours. $e^0 = 1$ et $e^x > 0$ pour tout x : ces deux faits servent dans presque tous les exercices du chapitre.

Erreur fréquente. Croire qu'un exposant négatif donne un résultat négatif. e^{-1} vaut 0,368, pas $-2{,}718$: l'exposant négatif inverse, il ne change pas le signe.

Correction de l'exercice 2 – Règle du produit

La règle fondamentale du chapitre : $e^a \times e^b = e^{a+b}$. On multiplie les exponentielles en AJOUTANT les exposants.

C'est la même règle que pour les puissances vues au collège : $2^3 \times 2^5 = 2^8$.
L'exponentielle se comporte exactement comme une puissance de base e.

$e^3 \times e^5 = e^{3+5} = e^8$.

$e^x \times e^2 = e^{x+2}$.

$e^{2x} \times e^{3x} = e^{2x+3x} = e^{5x}$. On additionne bien les exposants, et non les coefficients de manière séparée.

$e^a \times e^{-a} = e^{a-a} = e^0 = 1$. Deux exponentielles d'exposants opposés sont inverses l'une de l'autre.

$e^{x+1} \times e^{x-1} = e^{(x+1)+(x-1)} = e^{2x}$.

Vérification numérique du dernier cas avec $x = 1$: $e^2 \times e^0 = 7{,}389 \times 1 = 7{,}389$, et $e^{2\times 1} = e^2 = 7{,}389$. ✔

Erreur à ne jamais commettre : $e^a \times e^b$ n'est PAS e^{ab}. Avec $a = 2$ et $b = 3$, on aurait

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$e^6 \approx 403$ au lieu de $e^5 \approx 148$.

Réponse. e^8 ; e^{x+2} ; e^{5x} ; 1 ; e^{2x}.

Rappel de cours. $e^a \times e^b = e^{a+b}$: le produit devient une somme d'exposants. C'est la propriété qui définit l'exponentielle.

Erreur fréquente. Multiplier les exposants au lieu de les additionner. Un test rapide avec des petits nombres démasque l'erreur immédiatement.

Correction de l'exercice 3 – Quotient et inverse

Deuxième règle : $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$. On divise les exponentielles en SOUSTRAYANT les exposants.

Elle découle de la première : diviser par e^b, c'est multiplier par e^{-b}, donc ajouter $-b$ à l'exposant.

$\frac{e^7}{e^4} = e^{7-4} = e^3$.

$\frac{1}{e^x} = \frac{e^0}{e^x} = e^{0-x} = e^{-x}$. L'inverse d'une exponentielle s'obtient en changeant le signe de l'exposant.

$\frac{e^{5x}}{e^{2x}} = e^{5x-2x} = e^{3x}$.

$\frac{e^{-3}}{e^{-5}} = e^{-3-(-5)} = e^{-3+5} = e^2$. Attention au double signe moins : soustraire -5 revient à ajouter 5.

Vérification de ce dernier calcul : $e^{-3} \approx 0{,}0498$ et $e^{-5} \approx 0{,}00674$, donc le quotient vaut environ 7,39, soit bien e^2. ✔

$\frac{e^{2x+1}}{e^x} = e^{(2x+1)-x} = e^{x+1}$.

Point de vigilance : quand le numérateur est une somme d'exposants, on met TOUTE l'expression entre parenthèses avant de soustraire, sinon le signe moins ne se distribue pas correctement.

Réponse. e^3 ; e^{-x} ; e^{3x} ; e^2 ; e^{x+1}.

Rappel de cours. $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ et $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$.

Erreur fréquente. Oublier les parenthèses dans $e^{(2x+1)-x}$. Écrire e^{2x+1-x} fonctionne ici, mais $\frac{e^{3x}}{e^{x-2}}$ donne $e^{3x-x+2} = e^{2x+2}$, et non e^{3x-x-2}.

Correction de l'exercice 4 – Puissance d'une exponentielle

Troisième et dernière règle : $(e^a)^n = e^{a \times n}$. Ici, et seulement ici, les exposants se MULTIPLIENT.

On la comprend en déroulant : $(e^a)^3 = e^a \times e^a \times e^a = e^{a+a+a} = e^{3a}$.

$\left(e^2\right)^3 = e^{2 \times 3} = e^6$.

$(e^x)^4 = e^{4x}$.

$(e^{-x})^3 = e^{-3x}$. Le signe moins fait partie de l'exposant et se multiplie avec lui.

$\left(e^{0,5}\right)^2 = e^{0,5 \times 2} = e^1 = e$. C'est la traduction de $\sqrt{e} \times \sqrt{e} = e$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\left(e^{x+1}\right)^2 = e^{2(x+1)} = e^{2x+2}$. Il faut développer : oublier de distribuer le 2 donnerait e^{2x+1}, qui est faux.

Vérification avec $x = 0$: $\left(e^1\right)^2 = e^2 \approx 7{,}389$, et $e^{2\times 0+2} = e^2$. ✔

Récapitulatif des trois règles : produit → on ADDITIONNE les exposants · quotient → on SOUSTRAIT · puissance → on MULTIPLIE. Confondre les deux premières avec la troisième est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Réponse. e^6 ; e^{4x} ; e^{-3x} ; e ; e^{2x+2}.

Rappel de cours. $(e^a)^n = e^{na}$. Ne pas confondre avec $e^a \times e^b = e^{a+b}$.

Erreur fréquente. Écrire $\left(e^{x+1}\right)^2 = e^{2x+1}$. L'exposant entier est multiplié par 2, donc e^{2x+2}.

Correction de l'exercice 5 – Signe et sens de variation

Deux propriétés suffisent à répondre à tout : $e^x > 0$ pour tout x, et la fonction exponentielle est STRICTEMENT CROISSANTE.

« Strictement croissante » signifie : plus l'exposant est grand, plus la valeur est grande. Comparer deux exponentielles revient donc à comparer leurs exposants.

e^{-4} est strictement POSITIF, comme toute exponentielle. Il vaut environ 0,018 : très petit, mais positif.

Comparaison de e^2 et e^3 : puisque $2 < 3$ et que la fonction est croissante, $e^2 < e^3$. Le plus grand est donc e^3.

Vérification : $e^2 \approx 7{,}39$ et $e^3 \approx 20{,}09$. ✔

Comparaison de e^{-5} et e^{-2} : on compare les exposants, $-5 < -2$, donc $e^{-5} < e^{-2}$. Le plus grand est e^{-2}.

Vérification : $e^{-5} \approx 0{,}0067$ et $e^{-2} \approx 0{,}135$. ✔ Attention, c'est bien -2 le plus grand des deux exposants, même s'ils sont tous deux négatifs.

Pour $e^x > 1$, on écrit $1 = e^0$, ce qui donne $e^x > e^0$.

Par stricte croissance, cette inégalité équivaut à $x > 0$.

Interprétation graphique : la courbe de l'exponentielle passe par le point $(0\,;1)$, reste au-dessus de 1 à droite de ce point et en dessous à gauche, tout en restant toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

Réponse. $e^{-4} > 0 \cdot e^3 > e^2 \cdot e^{-2} > e^{-5} \cdot e^x > 1$ exactement pour $x > 0$.

Rappel de cours. Fonction strictement croissante : $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$. Comparer des exponentielles = comparer des exposants.

Erreur fréquente. Croire que $e^{-5} > e^{-2}$ parce que « 5 est plus grand que 2 ». C'est l'EXPOSANT qu'on compare, et $-5 < -2$.

Correction de l'exercice 6 – Simplifier des expressions combinées

Méthode générale : on traite d'abord les puissances, puis les produits, puis les quotients — l'ordre des priorités habituelles.

Pour A, on simplifie le numérateur : $e^{2x} \times e^3 = e^{2x+3}$.

Puis le quotient : $A = \dfrac{e^{2x+3}}{e^x} = e^{(2x+3)-x} = e^{x+3}$.

Pour B, on commence par la puissance : $(e^x)^2 = e^{2x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Puis le produit : $B = e^{2x} \times e^{-3x} = e^{2x-3x} = e^{-x}$.

Pour C, on soustrait les exposants en pensant aux parenthèses : $C = e^{(x+1)-(2x-1)}$.

On développe l'exposant : $(x+1)-(2x-1) = x+1-2x+1 = -x+2$. Donc $C = e^{2-x}$.

Pour D, le numérateur donne $e^{2x} \times e^{-x} = e^{x}$ et le dénominateur $(e^{x})^{3} = e^{3x}$.

Donc $D = \dfrac{e^{x}}{e^{3x}} = e^{x-3x} = e^{-2x}$.

Vérification numérique avec $x = 1$. $A = e^{4} \approx 54{,}6$: on retrouve bien $\dfrac{e^{2} \times e^{3}}{e} = \dfrac{7{,}389 \times 20{,}086}{2{,}718} \approx 54{,}6$. ✔

Même contrôle sur C avec $x = 1$: $C = e^{1} \approx 2{,}718$, et $\dfrac{e^{2}}{e^{1}} = e \approx 2{,}718$. ✔

Conseil de rédaction : on écrit systématiquement l'exposant intermédiaire entre parenthèses avant de le développer. C'est ce qui évite les erreurs de signe, de loin la première cause de perte de points ici.

Réponse. $A = e^{x+3}$; $B = e^{-x}$; $C = e^{2-x}$; $D = e^{-2x}$.

Rappel de cours. Une seule stratégie : ramener toute l'expression à un unique e^{exposant}, puis réduire l'exposant comme une expression littérale ordinaire.

Erreur fréquente. Dans C, oublier de distribuer le signe moins et écrire $e^{x+1-2x-1} = e^{-x}$. Le résultat correct est e^{2-x}.

Correction de l'exercice 7 – Résoudre une équation

Propriété clé : la fonction exponentielle est strictement croissante, donc deux exponentielles sont égales si et seulement si leurs EXPOSANTS sont égaux.

Autrement dit : $e^{a} = e^{b}$ équivaut à $a = b$. Résoudre une équation exponentielle revient donc à résoudre une équation ordinaire.

$e^{x} = e^{5}$ donne directement $x = 5$. Solution : $S = \{5\}$.

$e^{2x-1} = e^{x+3}$ donne $2x - 1 = x + 3$, soit $2x - x = 3 + 1$, donc $x = 4$.

Vérification : $2 \times 4 - 1 = 7$ et $4 + 3 = 7$. Les deux exposants coïncident. ✔

$e^{3x} = 1$: on écrit $1 = e^{0}$, donc $e^{3x} = e^{0}$, d'où $3x = 0$ et $x = 0$.

$e^{x^{2}} = e^{4}$ donne $x^{2} = 4$, équation qui a DEUX solutions : $x = 2$ et $x = -2$.

Vérification pour $x = -2$: $(-2)^{2} = 4$, donc $e^{4} = e^{4}$. ✔ La solution négative convient parfaitement.

Le passage à l'exponentielle ne fait ni apparaître ni disparaître de solutions : c'est l'équation sur les exposants qui décide de leur nombre.

Attention toutefois : une équation comme $e^{x} = -3$ n'a aucune solution, puisque e^{x} est toujours strictement positif. On le signale AVANT de se lancer dans un calcul.

Réponse. $x = 5$; $x = 4$; $x = 0$; $x = 2$ ou $x = -2$.

Rappel de cours. $e^{a} = e^{b} \Leftrightarrow a = b$. Et $e^{a} = k$ est impossible dès que $k \leq 0$.

Erreur fréquente. Ne donner qu'une solution à $x^{2} = 4$. L'équation carrée en a deux, opposées l'une de l'autre.

Correction de l'exercice 8 – Résoudre une inéquation

La stricte croissance sert aussi pour les inéquations : $e^{a} < e^{b}$ équivaut à $a < b$. Le sens de l'inégalité est CONSERVÉ.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$e^x > e^3$ équivaut donc à $x > 3$. Solution : $]3\,;+\infty[$.

$e^{2x-1} \leq e^5$ équivaut à $2x - 1 \leq 5$, soit $2x \leq 6$, donc $x \leq 3$. Solution : $]-\infty\,;3]$.

On remarque qu'ici la division par 2, nombre positif, ne change pas non plus le sens de l'inégalité.

$e^{-x} > 1$: on écrit $1 = e^0$, donc $e^{-x} > e^0$, ce qui équivaut à $-x > 0$.

On divise par -1, nombre NÉGATIF : le sens de l'inégalité s'inverse, donc $x < 0$. Solution : $]-\infty\,;0[$.

Vérification avec $x = -1$: $e^{-(-1)} = e^1 \approx 2{,}718 > 1$. ✔ Et avec $x = 1$: $e^{-1} \approx 0{,}368 < 1$, donc $x = 1$ ne convient pas. ✔

$e^x > -2$: comme e^x est toujours strictement positif, donc toujours supérieur à -2, l'inégalité est vraie pour TOUT réel x.

Solution : $S = \mathbb{R}$. Aucun calcul n'est nécessaire, seulement la propriété de signe.

Résumé des deux points de vigilance : l'exponentielle conserve le sens de l'inégalité, mais les opérations qu'on fait ensuite sur les exposants (multiplier ou diviser par un négatif) peuvent l'inverser.

Réponse. $x > 3$; $x \leq 3$; $x < 0$; $S = \mathbb{R}$.

Rappel de cours. $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$: l'exponentielle ne renverse jamais l'inégalité. Ce sont les manipulations d'exposants qui peuvent le faire.

Erreur fréquente. Résoudre $-x > 0$ en $x > 0$. La division par -1 inverse le sens : la solution est $x < 0$.

Correction de l'exercice 9 – Factoriser pour déterminer un signe

Pour factoriser, on écrit e^{2x} en faisant apparaître e^x : $e^{2x} = e^{x+x} = e^x \times e^x$.

Donc $f(x) = e^x \times e^x + e^x = e^x(e^x + 1)$.

Vérification en développant : $e^x \times e^x + e^x \times 1 = e^{2x} + e^x$. ✔ On retrouve l'expression de départ.

Pour le signe, on examine chaque facteur séparément.

Le facteur e^x est strictement positif pour tout x.

Le facteur $e^x + 1$ est strictement positif également, puisqu'il vaut au minimum un peu plus que 1 — c'est un nombre positif augmenté de 1.

Produit de deux facteurs strictement positifs : $f(x) > 0$ pour tout réel x. L'expression ne s'annule jamais.

Pour l'équation $e^{2x} - e^x = 0$, on factorise de la même façon : $e^x(e^x - 1) = 0$.

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Or $e^x \neq 0$: ce facteur ne peut jamais s'annuler.

Il reste donc $e^x - 1 = 0$, soit $e^x = 1 = e^0$, donc $x = 0$.

Vérification : pour $x = 0$, $e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$. ✔ Solution unique : $S = \{0\}$.

Ce raisonnement — factoriser par e^x, écarter ce facteur qui ne s'annule jamais — revient dans tous les exercices de signe du chapitre.

Réponse. $f(x) = e^x(e^x + 1)$ · $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ · l'équation $e^{2x} - e^x = 0$ a pour unique solution $x = 0$.

Rappel de cours. $e^{2x} = (e^x)^2$: c'est cette écriture qui rend la factorisation par e^x possible.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Simplifier l'équation en divisant par e^x sans le dire. C'est légitime ici (le facteur n'est jamais nul), mais il faut le JUSTIFIER — c'est précisément ce que le correcteur attend.

Correction de l'exercice 10 – Lecture graphique de la courbe

Pour lire e^1, on part de $x = 1$ sur l'axe horizontal, on monte jusqu'à la courbe, puis on lit l'ordonnée : environ 2,7.

Valeur exacte à la calculatrice : $e \approx 2{,}718$. La lecture graphique est cohérente. ✔

Pour e^2, même méthode à partir de $x = 2$: on lit environ 7,4, et la calculatrice donne 7,389. ✔

Pour résoudre $e^x = 5$, on fait le chemin INVERSE : on part de 5 sur l'axe vertical, on va horizontalement jusqu'à la courbe, puis on descend lire l'abscisse.

On lit $x \approx 1{,}6$.

Contrôle par le calcul : $e^{1,6} \approx 4{,}953$, ce qui est très proche de 5. ✔ La solution exacte, obtenue à la calculatrice, vaut environ 1,609.

Cette valeur 1,609 porte un nom, $\ln 5$, et fera l'objet d'un chapitre en Terminale. En Première, on se contente de la lecture graphique ou de la calculatrice.

Pour la dernière question : la courbe ne coupe JAMAIS l'axe des abscisses, car cela signifierait $e^x = 0$, ce qui est impossible puisque l'exponentielle est strictement positive.

Graphiquement, la courbe se rapproche de l'axe des abscisses quand x devient très négatif, mais sans jamais l'atteindre : elle reste au-dessus.

On peut le vérifier numériquement : $e^{-5} \approx 0{,}0067$, $e^{-10} \approx 0{,}0000454$. Les valeurs s'écrasent vers 0 sans jamais valoir 0.

Réponse. $e^1 \approx 2{,}7$ et $e^2 \approx 7{,}4$ · $e^x = 5$ donne $x \approx 1{,}6$ · la courbe ne coupe jamais l'axe des abscisses, car $e^x > 0$.

Rappel de cours. Lire $f(a)$: on part de l'axe des x. Résoudre $f(x) = k$: on part de l'axe des y. Le sens de lecture change selon la question.

Erreur fréquente. Répondre que la courbe « finit par toucher l'axe » à gauche. Elle s'en approche indéfiniment sans jamais le couper — c'est une asymptote.

Correction de l'exercice 11 – Croissance exponentielle et taux annuel

Population initiale : on prend $t = 0$, donc $f(0) = 200\,e^0 = 200 \times 1 = 200$ bactéries.

Après 10 h : $f(10) = 200\,e^{0,05 \times 10} = 200\,e^{0,5}$.

$e^{0,5} \approx 1{,}64872$, donc $f(10) \approx 329{,}74$, soit environ 330 bactéries.

Après 20 h : $f(20) = 200\,e^1 \approx 200 \times 2{,}71828 \approx 543{,}66$, soit environ 544 bactéries.

Pour le rapport, on calcule $\dfrac{f(t+1)}{f(t)} = \dfrac{200\,e^{0,05(t+1)}}{200\,e^{0,05t}}$.

Les 200 se simplifient, et le quotient des exponentielles donne $e^{0,05(t+1) - 0,05t} = e^{0,05}$.

Le rapport vaut donc $e^{0,05} \approx 1{,}05127$, et surtout : il ne dépend PAS de t.

Interprétation : d'une heure à la suivante, la population est toujours multipliée par le même nombre. C'est exactement la définition d'une suite géométrique, de raison $q = e^{0,05}$.

Le lien avec le chapitre 3 est donc total : e^{kt} est la version continue d'une suite géométrique de raison e^k.

Pourcentage horaire : le coefficient multiplicateur vaut 1,05127, donc le taux est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$(1{,}05127 - 1) \times 100 \approx 5{,}13\,\%$ par heure.

Remarque importante : le coefficient 0,05 de l'exposant n'est PAS le taux horaire. Il vaut 5 %, alors que le vrai taux est 5,13 %. L'écart vient de la croissance continue.

Vérification de cohérence : $f(0) \times 1{,}05127^{10} \approx 200 \times 1{,}6487 \approx 329{,}74$, ce qui correspond bien à $f(10)$. ✔

Réponse. $f(0) = 200$, $f(10) \approx 330$ et $f(20) \approx 544$ bactéries · $\dfrac{f(t+1)}{f(t)} = e^{0{,}05} \approx 1{,}0513$, constant · soit environ +5,13 % par heure.

Rappel de cours. $f(t) = A\,e^{kt}$ équivaut à une évolution de coefficient constant e^k par unité de temps. Le taux vaut $\left(e^k - 1\right) \times 100\,\%$, pas $k \times 100\,\%$.

Erreur fréquente. Annoncer « +5 % par heure » en lisant le 0,05 de l'exposant. Le taux réel est 5,13 % ; l'approximation ne vaut que pour de petits coefficients.

Correction de l'exercice 12 – Décroissance et demi-vie

Masse initiale : $M(0) = 80\,e^0 = 80$ g.

Au bout de 10 ans : $M(10) = 80\,e^{-0{,}3}$.

$e^{-0{,}3} \approx 0{,}740818$, donc $M(10) \approx 59{,}27$ g.

Pour la décroissance, on regarde le coefficient de t dans l'exposant : il vaut $-0{,}03$, donc il est négatif.

Quand t augmente, l'exposant $-0{,}03t$ DIMINUE ; comme l'exponentielle est croissante, $e^{-0{,}03t}$ diminue aussi. La masse est donc décroissante.

Autre justification, équivalente : $\dfrac{M(t+1)}{M(t)} = e^{-0{,}03} \approx 0{,}97045$, un coefficient inférieur à 1. La masse perd donc environ 2,95 % par an.

Demi-vie : on cherche t tel que $M(t) = 40$ g, soit $80\,e^{-0{,}03t} = 40$, c'est-à-dire $e^{-0{,}03t} = 0{,}5$.

Cette équation ne se résout pas exactement avec les outils de Première : on procède par balayage à la calculatrice.

$t = 20$: $M(20) = 80\,e^{-0{,}6} \approx 43{,}91$ g — encore au-dessus de 40.

$t = 23$: $M(23) = 80\,e^{-0{,}69} \approx 40{,}13$ g — juste au-dessus.

$t = 24$: $M(24) = 80\,e^{-0{,}72} \approx 38{,}94$ g — cette fois en dessous.

La demi-vie est donc comprise entre 23 et 24 ans. En affinant, on trouve environ 23,1 ans.

Vérification : $M(23{,}1) = 80\,e^{-0{,}693} \approx 40{,}01$ g, soit bien la moitié de 80 g. ✔

Propriété remarquable : cette demi-vie ne dépend pas de la masse de départ. En partant de 160 g, il faudrait exactement le même temps pour redescendre à 80 g — c'est la signature d'une décroissance exponentielle.

Réponse. $M(0) = 80$ g et $M(10) \approx 59{,}27$ g · décroissante car le coefficient $-0{,}03$ est négatif (soit $-2{,}95\,\%$ par an) · demi-vie ≈ 23,1 ans.

Rappel de cours. $A\,e^{kt}$: croissante si $k > 0$, décroissante si $k < 0$. Le coefficient de t porte à lui seul le sens de variation.

Erreur fréquente. Croire que la masse atteindra zéro. Elle tend vers 0 sans jamais l'atteindre : après 100 ans il reste encore $80\,e^{-3} \approx 3{,}98$ g.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Équation avec changement d'inconnue

On remarque que $e^{2x} = (e^x)^2$: l'équation ne fait donc intervenir que e^x et son carré.

On pose alors $X = e^x$. L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$, un simple trinôme du second degré.

Contrainte à retenir pour la suite : puisque $X = e^x$, on doit avoir $X > 0$. Toute solution négative ou nulle sera à rejeter.

Résolution du trinôme : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$.

$\sqrt{\Delta} = 1$, donc $X_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$.

On peut aussi factoriser directement : $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, ce qui donne les mêmes racines. ✔

Les deux valeurs sont strictement positives, donc toutes deux acceptables.

Retour à l'inconnue de départ. Premier cas : $e^x = 1 = e^0$, donc $x = 0$.

Second cas : $e^x = 2$. Cette valeur n'est pas une puissance « ronde » de e ; on la lit à la calculatrice, $x \approx 0{,}693$ — c'est le nombre appelé $\ln 2$, étudié en Terminale.

Vérification de la première solution : $e^0 - 3e^0 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$. ✔

Vérification de la seconde, avec $e^x = 2$: $e^{2x} = (e^x)^2 = 4$, donc $4 - 3 \times 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$. ✔

Conclusion : $S = \{0\,;\,0{,}693\}$ à 10^{-3} près, la seconde solution étant exactement $\ln 2$.

Le réflexe à retenir : dès qu'une équation contient e^{2x} et e^x, on pose $X = e^x$ et on se ramène au second degré, sans oublier la condition $X > 0$.

Réponse. $x = 0$ et $x \approx 0{,}693$ (c'est-à-dire $\ln 2$).

Rappel de cours. Changement d'inconnue $X = e^x$: on retombe sur un trinôme. La condition $X > 0$ fait partie de la résolution.

Erreur fréquente. Oublier de revenir à x et donner $X = 1$ et $X = 2$ comme réponses. Ce sont les valeurs de e^x, pas celles de x.

Correction de l'exercice 14 – Modèle de population et taux équivalent

En 2027, une année s'est écoulée, donc $t = 1$: $N(1) = 1\,500\,e^{0{,}08}$.

$e^{0{,}08} \approx 1{,}083287$, donc $N(1) \approx 1\,624{,}93$, soit environ 1 625 habitants.

En 2031, on a $2031 - 2026 = 5$, donc $t = 5$: $N(5) = 1\,500\,e^{0{,}4}$.

$e^{0{,}4} \approx 1{,}491825$, donc $N(5) \approx 2\,237{,}74$, soit environ 2 238 habitants.

Pour le taux annuel, on calcule le coefficient multiplicateur d'une année sur l'autre : $\dfrac{N(t+1)}{N(t)} = e^{0{,}08}$.

Ce coefficient vaut 1,083287, donc le taux est $(1{,}083287 - 1) \times 100 \approx 8{,}33\,\%$ par an.

Précisément : 8,3287 %, soit 8,33 % à 0,01 % près.

Pour la dernière question, on utilise la règle de la puissance à l'envers : $e^{0{,}08t} = \left(e^{0{,}08}\right)^t$.

Donc $N(t) = 1\,500 \times \left(e^{0{,}08}\right)^t$, c'est-à-dire $q = e^{0{,}08} \approx 1{,}0833$.

Vérification de l'équivalence des deux écritures pour $t = 5$:
$1\,500 \times 1{,}083287^5 \approx 1\,500 \times 1{,}49182 \approx 2\,237{,}7$. ✔ On retrouve bien $N(5)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Ce que montre cette question : tout modèle exponentiel $A\,e^{kt}$ peut s'écrire comme une croissance en pourcentage $A \times q^t$, et réciproquement. Les deux langages décrivent la même chose.

Attention à ne pas confondre le 0,08 de l'exposant (le coefficient de croissance continue) et le 0,0833 du taux annuel réel. Le second est toujours un peu plus grand que le premier quand $k > 0$.

Réponse. $N(1) \approx 1\,625$ et $N(5) \approx 2\,238$ habitants · taux annuel $\approx 8{,}33\,\%$ · $q = e^{0{,}08} \approx 1{,}0833$.

Rappel de cours. $A\,e^{kt} = A \times \left(e^{k}\right)^{t}$: passer du langage « exponentielle » au langage « pourcentage » ne demande qu'une seule règle, celle de la puissance.

Erreur fréquente. Calculer la population de 2031 avec $t = 2031$. Le rang compte les années écoulées depuis l'origine du modèle, ici $t = 5$.

Correction de l'exercice 15 – Deux courbes symétriques

Produit : $f(x) \times g(x) = e^{x} \times e^{-x} = e^{x-x} = e^{0} = 1$.

Interprétation : pour toute valeur de x, les deux nombres sont INVERSES l'un de l'autre. Quand l'un vaut 7,39, l'autre vaut $\frac{1}{7{,}39} \approx 0{,}135$.

Vérification à $x = 2$: $e^{2} \approx 7{,}389$ et $e^{-2} \approx 0{,}135$, et leur produit vaut bien 1. ✔

Pour la deuxième question : $f(-x) = e^{-x}$, qui est exactement l'expression de $g(x)$. Donc $g(x) = f(-x)$.

Conséquence géométrique : le point de la courbe de g d'abscisse x a la même ordonnée que le point de la courbe de f d'abscisse $-x$.

Les deux courbes sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à l'AXE DES ORDONNÉES, ce que confirme le graphique.

Cela explique aussi le comportement de g : elle décroît, s'approche de 0 à droite et devient très grande à gauche — le miroir exact de f.

Pour l'équation $f(x) = g(x)$, on écrit $e^{x} = e^{-x}$.

Par égalité des exposants : $x = -x$, soit $2x = 0$, donc $x = 0$.

Vérification : $f(0) = e^{0} = 1$ et $g(0) = e^{0} = 1$. Les deux courbes se coupent bien au point $(0\,;1)$, comme on le voit sur le graphique. ✔

Autre chemin possible : puisque $f(x) \times g(x) = 1$ et que $f(x) = g(x)$, on obtient $(e^{x})^{2} = 1$, donc $e^{x} = 1$ (la valeur -1 étant exclue car l'exponentielle est positive), d'où $x = 0$. ✔

Ce second raisonnement illustre une habitude utile : quand deux chemins mènent au même résultat, la réponse est fiable.

Réponse. $f(x) \times g(x) = 1$ (fonctions inverses l'une de l'autre) · $g(x) = f(-x)$, d'où la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées · les courbes se coupent en $x = 0$, au point $(0\,;1)$.

Rappel de cours. $e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$: la courbe de e^{-x} est la symétrique de celle de e^{x} par rapport à l'axe des ordonnées.

Erreur fréquente. Résoudre $x = -x$ en concluant « pas de solution ». L'équation se ramène à $2x = 0$ et admet bien la solution $x = 0$.

Correction de l'exercice 16 – Intérêts annuels ou croissance continue

Formule A au bout de 10 ans : $A_{10} = 5\,000 \times 1{,}04^{10}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$1{,}04^{10} \approx 1{,}480244$, donc $A_{10} \approx 7\,401{,}22$ €.

Formule B au bout de 10 ans : $B(10) = 5\,000\,e^{0{,}4}$.

$e^{0{,}4} \approx 1{,}491825$, donc $B(10) \approx 7\,459{,}12$ €.

La formule B rapporte donc $7\,459{,}12 - 7\,401{,}22 = 57{,}90$ € de plus au bout de dix ans.

Taux annuel réel de B : $\dfrac{B(t+1)}{B(t)} = e^{0{,}04} \approx 1{,}040811$, soit un taux de 4,0811 % par an.

C'est légèrement plus que les 4 % de la formule A : voilà l'explication de l'écart.

Pourquoi ? Parce que la croissance continue rémunère les intérêts DÈS qu'ils sont produits, sans attendre la fin de l'année. Les intérêts produisent eux-mêmes des intérêts en cours d'année.

Autrement dit : $e^{0{,}04} > 1{,}04$. C'est une inégalité générale, vraie pour tout $k > 0$: $e^k > 1 + k$.

Au bout de 20 ans : $A_{20} = 5\,000 \times 1{,}04^{20} \approx 5\,000 \times 2{,}191123 \approx 10\,955{,}62$ €.

Et $B(20) = 5\,000\,e^{0{,}8} \approx 5\,000 \times 2{,}225541 \approx 11\,127{,}70$ €.

L'écart atteint $11\,127{,}70 - 10\,955{,}62 = 172{,}08$ €, soit près de trois fois l'écart observé à dix ans.

Contrôle de cohérence : l'écart doit croître avec le temps, puisque les deux capitaux évoluent à des taux différents (4 % contre 4,0811 %) sur des bases qui grandissent. ✔

Conclusion à retenir : e^{kt} et $(1+k)^t$ sont proches pour de petits k, mais jamais égaux. Le modèle continu donne toujours un peu plus.

Réponse. $A_{10} \approx 7\,401{,}22$ € contre $B(10) \approx 7\,459{,}12$ €, soit 57,90 € d'écart · taux réel de B ≈ 4,08 % · à 20 ans, l'écart atteint 172,08 €.

Rappel de cours. Pour $k > 0$, $e^k > 1 + k$: la croissance continue dépasse toujours la capitalisation annuelle de même coefficient.

Erreur fréquente. Écrire $e^{0{,}04} = 1{,}04$. Les deux valeurs sont proches (1,0408 contre 1,04) mais distinctes, et c'est précisément cette différence que l'exercice mesure.

Correction de l'exercice 17 – Équation produit et signe de l'exponentielle

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul. On traite donc les deux cas séparément.

Premier cas : $e^x - 2 = 0$, c'est-à-dire $e^x = 2$.

Cette équation a une solution unique, car l'exponentielle est strictement croissante et $2 > 0$. À la calculatrice, $x \approx 0{,}693$ (c'est $\ln 2$).

Second cas : $e^x + 3 = 0$, c'est-à-dire $e^x = -3$.

Or e^x est strictement positif pour tout x : cette équation n'a AUCUNE solution. Le second facteur ne s'annule jamais.

L'équation admet donc une unique solution : $S = \{0{,}693\}$ environ, exactement $\ln 2$.

Pour l'inéquation, on étudie le signe de chaque facteur, sachant que le second est toujours strictement positif.

En effet, $e^x + 3 > 0 + 3 = 3 > 0$ pour tout x, puisque $e^x > 0$.

Le signe du produit est donc entièrement déterminé par celui du premier facteur : le produit est positif exactement quand $e^x - 2 > 0$.

$e^x - 2 > 0$ équivaut à $e^x > 2$, donc, par stricte croissance, à $x > 0{,}693$ environ.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Solution de l'inéquation : $]0{,}693\,;+\infty[$ approximativement, soit $]\ln 2\,;+\infty[$.

Vérification avec $x = 1$: $e^1 - 2 \approx 0{,}718 > 0$ et $e^1 + 3 \approx 5{,}718 > 0$, donc le produit est positif. ✔

Vérification avec $x = 0$: $e^0 - 2 = -1 < 0$ et $e^0 + 3 = 4 > 0$, donc le produit vaut -4, bien négatif. ✔

Ce que l'exercice met en place : quand un facteur ne change jamais de signe, on l'écarte du tableau de signes après l'avoir justifié. C'est une simplification très fréquente avec l'exponentielle.

Réponse. Équation : $x \approx 0{,}693$ (soit $\ln 2$), unique solution · inéquation : $x > 0{,}693$ environ, c'est-à-dire $]\ln 2\,;+\infty[$.

Rappel de cours. $e^x + k > 0$ pour tout x dès que $k \geq 0$: ce facteur ne s'annule jamais et ne change jamais de signe.

Erreur fréquente. Traiter $e^x = -3$ comme une équation ordinaire et « trouver » une solution. Elle est impossible, et le dire fait partie de la réponse attendue.

Correction de l'exercice 18 – Refroidissement d'une boisson

Température initiale : $T(0) = 20 + 60\,e^0 = 20 + 60 = 80$ °C.

Au bout de 10 minutes : $T(10) = 20 + 60\,e^{-1}$.

$e^{-1} \approx 0{,}367879$, donc $60\,e^{-1} \approx 22{,}07$ et $T(10) \approx 42{,}07$ °C.

Au bout de 20 minutes : $T(20) = 20 + 60\,e^{-2} \approx 20 + 60 \times 0{,}135335 \approx 20 + 8{,}12 \approx 28{,}12$ °C.

Comportement à long terme : quand t grandit, $-0{,}1t$ devient très négatif, donc $e^{-0{,}1t}$ tend vers 0.

Le terme $60\,e^{-0{,}1t}$ s'écrase donc vers 0, et $T(t)$ se rapproche de 20 °C sans jamais l'atteindre.

La droite en pointillés $y = 20$ est l'ASYMPTOTE de la courbe : elle représente la température ambiante de la pièce, vers laquelle la boisson tend.

Interprétation physique : une boisson ne peut pas refroidir en dessous de la température de la pièce, et elle s'en approche d'autant plus lentement qu'elle en est proche.

Pour le seuil de 30 °C, on résout $20 + 60\,e^{-0{,}1t} < 30$, soit $60\,e^{-0{,}1t} < 10$, c'est-à-dire $e^{-0{,}1t} < \dfrac{1}{6}$.

On procède par balayage. $t = 15$: $T(15) = 20 + 60\,e^{-1{,}5} \approx 20 + 13{,}39 \approx 33{,}39$ °C — encore trop chaud.

$t = 17$: $T(17) = 20 + 60\,e^{-1{,}7} \approx 20 + 10{,}96 \approx 30{,}96$ °C — toujours au-dessus de 30.

$t = 18$: $T(18) = 20 + 60\,e^{-1{,}8} \approx 20 + 9{,}92 \approx 29{,}92$ °C — le seuil est franchi.

La boisson passe donc sous 30 °C au bout de 18 minutes (la valeur exacte est d'environ 17,9 minutes).

Contrôle de vraisemblance : $T(17) \approx 30{,}96$ et $T(18) \approx 29{,}92$, donc le franchissement a bien lieu entre ces deux instants. ✔

Réponse. $T(0) = 80$ °C · $T(10) \approx 42{,}07$ °C et $T(20) \approx 28{,}12$ °C · la température tend vers 20 °C (asymptote $y = 20$, température de la pièce) · le seuil de 30 °C est franchi au bout de 18 minutes.

Rappel de cours. Un modèle $a + b\,e^{-kt}$ avec $k > 0$ tend vers a : le terme exponentiel s'efface, la constante reste. C'est la valeur limite du phénomène.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Résoudre $e^{-0,1t} < 30$ en oubliant de retrancher les 20 et de diviser par 60 d'abord. C'est bien $e^{-0,1t} < \dfrac{1}{6}$ qu'il faut traiter.

Correction de l'exercice 19 – Une identité à démontrer

Deux stratégies sont possibles : développer les deux carrés, ou reconnaître une identité remarquable. On va faire les deux, la seconde servant de vérification.

Méthode 1, en développant. $(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2\,e^x e^{-x} + (e^{-x})^2$.

Or $(e^x)^2 = e^{2x}$, $(e^{-x})^2 = e^{-2x}$ et $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$.

Donc $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$.

De même : $(e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2\,e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$.

La différence vaut donc $\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)$.

En distribuant le signe moins : $e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x} = 4$.

Les termes e^{2x} et e^{-2x} se simplifient deux à deux, il ne reste que $2 + 2 = 4$. L'identité est démontrée.

Méthode 2, par l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, avec $A = e^x + e^{-x}$ et $B = e^x - e^{-x}$.

$A - B = (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) = 2e^{-x}$.

$A + B = (e^x + e^{-x}) + (e^x - e^{-x}) = 2e^x$.

Donc $A^2 - B^2 = 2e^{-x} \times 2e^x = 4\,e^{-x+x} = 4\,e^0 = 4$. ✔ Les deux méthodes concordent.

Vérification numérique avec $x = 0,7$: $e^{0,7} \approx 2,0138$ et $e^{-0,7} \approx 0,4966$.

$(2,0138 + 0,4966)^2 \approx 2,5104^2 \approx 6,302$ et $(2,0138 - 0,4966)^2 \approx 1,5172^2 \approx 2,302$. Leur différence vaut bien 4. ✔

Ce qui rend l'exercice possible tient en une ligne : $e^x \times e^{-x} = 1$. C'est ce produit qui fait disparaître tous les termes en x et laisse une constante.

Réponse. La différence vaut 4 pour tout réel x, car $e^x \times e^{-x} = 1$ fait disparaître tous les termes variables.

Rappel de cours. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ reste souvent plus rapide que le double développement, et fournit une vérification indépendante.

Erreur fréquente. Écrire $(e^x)^2 = e^{x^2}$. C'est e^{2x} : on multiplie l'exposant par 2, on ne l'élève pas au carré.

Correction de l'exercice 20 – Synthèse : croissance d'une audience

Au bout d'un mois : $A(1) = 12\,000\,e^{0,15}$.

$e^{0,15} \approx 1,161834$, donc $A(1) \approx 13\,942,01$, soit environ 13 942 abonnés.

Au bout de six mois : $A(6) = 12\,000\,e^{0,9}$.

$e^{0,9} \approx 2,459603$, donc $A(6) \approx 29\,515,24$, soit environ 29 515 abonnés.

Taux mensuel : le coefficient multiplicateur d'un mois sur l'autre vaut $\dfrac{A(t+1)}{A(t)} = e^{0,15} \approx 1,161834$.

Le taux est donc $(1,161834 - 1) \times 100 \approx 16,18\,\%$ par mois — nettement plus que les 15 % que le coefficient de l'exposant pourrait laisser croire.

Écriture équivalente : $A(t) = 12\,000 \times \left(e^{0,15}\right)^t = 12\,000 \times 1,1618^{\,t}$, donc $q \approx 1,1618$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pour le seuil, on cherche le premier mois entier où $A(t) > 50\,000$, par balayage.

$t = 9$: $A(9) = 12\,000\,e^{1,35} \approx 12\,000 \times 3{,}857426 \approx 46\,289{,}11$ — insuffisant.

$t = 10$: $A(10) = 12\,000\,e^{1,5} \approx 12\,000 \times 4{,}481689 \approx 53\,780{,}27$ — le seuil est dépassé.

La chaîne dépasse donc 50 000 abonnés au bout de 10 mois (la valeur exacte se situe vers 9,51 mois).

Au bout de deux ans, soit $t = 24$: $A(24) = 12\,000\,e^{3,6} \approx 12\,000 \times 36{,}598 \approx 439\,177$ abonnés.

Et à trois ans, $t = 36$ donnerait $12\,000\,e^{5,4} \approx 2\,657\,000$ abonnés. La croissance devient vertigineuse.

Commentaire attendu : le modèle n'est PAS réaliste sur le long terme. Une croissance exponentielle ne rencontre aucune limite, alors qu'une audience réelle sature — public disponible fini, désabonnements, concurrence.

Un modèle exponentiel décrit bien une phase de démarrage, sur quelques mois. Au-delà, on lui préfère des modèles qui plafonnent, comme celui de l'exercice sur le refroidissement, où une constante fixe la limite.

Contrôle de cohérence des réponses entre elles :
$12\,000 \times 1{,}1618^{10} \approx 12\,000 \times 4{,}4817 \approx 53\,780$, ce qui correspond bien à $A(10)$. ✔ Les deux écritures du modèle donnent le même résultat.

Réponse. $A(1) \approx 13\,942$ et $A(6) \approx 29\,515$ abonnés · taux mensuel $\approx 16{,}18\,\%$, soit $q \approx 1{,}1618$ · seuil de 50 000 franchi au bout de 10 mois · à deux ans le modèle prévoit environ 439 000 abonnés, ce qui n'est plus réaliste : une croissance exponentielle ne sature jamais.

Rappel de cours. Toujours interroger la VALIDITÉ d'un modèle exponentiel dans la durée : il décrit une phase de croissance, jamais un régime permanent.

Erreur fréquente. Annoncer +15 % par mois en lisant le coefficient de l'exposant. Le taux réel est 16,18 %, et l'écart s'amplifie sur 24 mois.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).