Fonction exponentielle — Première générale

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

La fonction exponentielle transforme les additions en multiplications : $e^{a+b} = e^a \times e^b$. Toutes les règles de calcul du chapitre en découlent, et il n'y en a que trois à connaître. Ces 20 exercices commencent par les manipuler jusqu'à l'automatisme, puis exploitent les deux propriétés qui servent partout : e^x est TOUJOURS strictement positif, et la fonction est strictement croissante — ce qui permet de résoudre équations et inéquations en comparant simplement les exposants. La seconde moitié est consacrée à la modélisation : croissance de population, refroidissement, capitalisation, avec à chaque fois le lien avec les suites géométriques du chapitre 3, dont l'exponentielle est la version continue.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-generale/fonction-exponentielle

Exercice 1 – Premières valeurs et notation

Donne la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième, de e^0, e^1, e^2, e^{-1} et $e^{0,5}$. Précise ensuite le signe de e^x selon les valeurs de x.

Exercice 2 – Règle du produit

Simplifie chaque expression sous la forme e^k ou $e^{\text{expression}}$: $e^3 \times e^5$; $e^x \times e^2$; $e^{2x} \times e^{3x}$; $e^a \times e^{-a}$; $e^{x+1} \times e^{x-1}$.

Exercice 3 – Quotient et inverse

Simplifie : $\dfrac{e^7}{e^4}$; $\dfrac{1}{e^x}$; $\dfrac{e^{5x}}{e^{2x}}$; $\dfrac{e^{-3}}{e^{-5}}$; $\dfrac{e^{2x+1}}{e^x}$.

Exercice 4 – Puissance d'une exponentielle

Simplifie : $\left(e^2\right)^3$; $(e^x)^4$; $(e^{-x})^3$; $\left(e^{0,5}\right)^2$; $\left(e^{x+1}\right)^2$.

Exercice 5 – Signe et sens de variation

Réponds en justifiant : e^{-4} est-il positif ou négatif ? Quel est le plus grand de e^2 et e^3 ? Et de e^{-5} et e^{-2} ? Pour quelles valeurs de x a-t-on $e^x > 1$?

Exercice 6 – Simplifier des expressions combinées

Simplifie au maximum, en écrivant le résultat sous la forme $e^{\text{expression}}$.

1. $A = \dfrac{e^{2x} \times e^3}{e^x}$

2. $B = (e^x)^2 \times e^{-3x}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. $C = \dfrac{e^{x+1}}{e^{2x-1}}$

4. $D = \dfrac{e^{2x} \times e^{-x}}{(e^{x})^{3}}$

Exercice 7 – Résoudre une équation

Résous dans $\mathbb{R}$: $e^{x} = e^{5}$; $e^{2x-1} = e^{x+3}$; $e^{3x} = 1$; $e^{x^2} = e^{4}$.

Exercice 8 – Résoudre une inéquation

Résous dans $\mathbb{R}$: $e^{x} > e^{3}$; $e^{2x-1} \leq e^{5}$; $e^{-x} > 1$; $e^{x} > -2$.

Exercice 9 – Factoriser pour déterminer un signe

On considère l'expression $f(x) = e^{2x} + e^{x}$.

1. Factorise $f(x)$ par e^{x}.

2. Déduis-en le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Résous ensuite l'équation $e^{2x} - e^{x} = 0$.

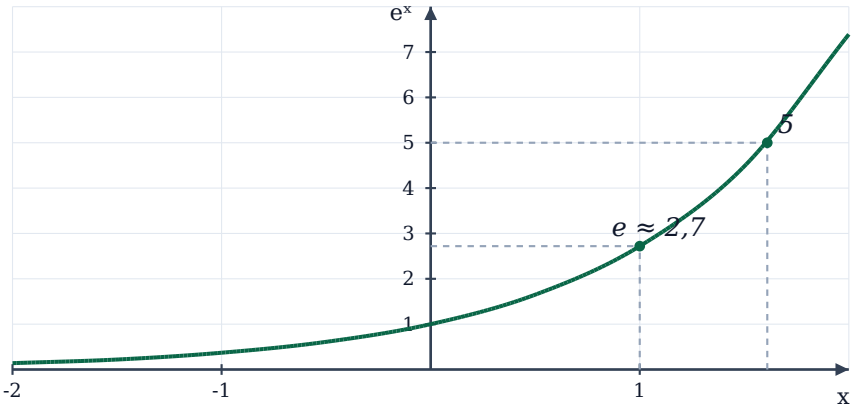
Exercice 10 – Lecture graphique de la courbe

La courbe ci-dessous est celle de la fonction $f(x) = e^{x}$.

1. Lis les valeurs approchées de e^{1} et e^{2}.

2. Résous graphiquement l'équation $e^{x} = 5$.

3. La courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifie.



Exercice 11 – Croissance exponentielle et taux annuel

Une population de bactéries est modélisée par $f(t) = 200\,e^{0{,}05t}$, où t est le temps en heures.

1. Calcule la population initiale, puis après 10 h et après 20 h.

2. Calcule le rapport $\dfrac{f(t+1)}{f(t)}$ et interprète-le.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Quel est le pourcentage d'augmentation par heure ?

Exercice 12 – Décroissance et demi-vie

La masse d'un échantillon radioactif, en grammes, est donnée par $M(t) = 80\,e^{-0{,}03t}$, où t est le temps en années.

1. Calcule la masse initiale et la masse au bout de 10 ans.

2. Justifie que la masse est décroissante.

3. Détermine, par balayage, la demi-vie de l'échantillon (temps au bout duquel il ne reste que la moitié de la masse initiale).

Exercice 13 – Équation avec changement d'inconnue

Résous l'équation $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$.

Exercice 14 – Modèle de population et taux équivalent

La population d'une ville, en habitants, est modélisée par $N(t) = 1\,500\,e^{0{,}08t}$, où t est le nombre d'années écoulées depuis 2026.

1. Calcule la population en 2027 et en 2031.

2. Quel est le taux d'évolution annuel de ce modèle, à 0,01 % près ?

3. Écris la population sous la forme $N(t) = 1\,500 \times q^{t}$ et donne q.

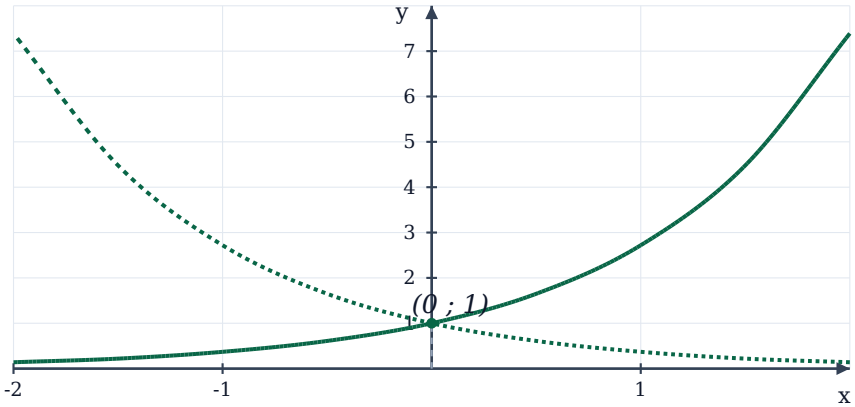
Exercice 15 – Deux courbes symétriques

On considère $f(x) = e^{x}$ (trait plein) et $g(x) = e^{-x}$ (pointillés), représentées ci-dessous.

1. Calcule $f(x) \times g(x)$ et interprète le résultat.

2. Montre que $g(x) = f(-x)$ et explique la symétrie observée.

3. Résous l'équation $f(x) = g(x)$.



Exercice 16 – Intérêts annuels ou croissance continue

Une banque propose deux formules pour placer 5 000 € : la formule A capitalise 4 % une fois par an, le capital vaut donc $A_n = 5\,000 \times 1{,}04^{\,n}$ après n années ; la formule B applique une croissance continue au même coefficient, le capital vaut

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$B(t) = 5\,000\,e^{0{,}04t}$ après t années.

1. Compare les capitaux au bout de 10 ans.

2. Quel est le taux annuel réel de la formule B ?

3. Explique pourquoi B rapporte davantage, et de combien au bout de 20 ans.

Exercice 17 – Équation produit et signe de l'exponentielle

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $(e^x - 2)(e^x + 3) = 0$, puis l'inéquation $(e^x - 2)(e^x + 3) > 0$.

Exercice 18 – Refroidissement d'une boisson

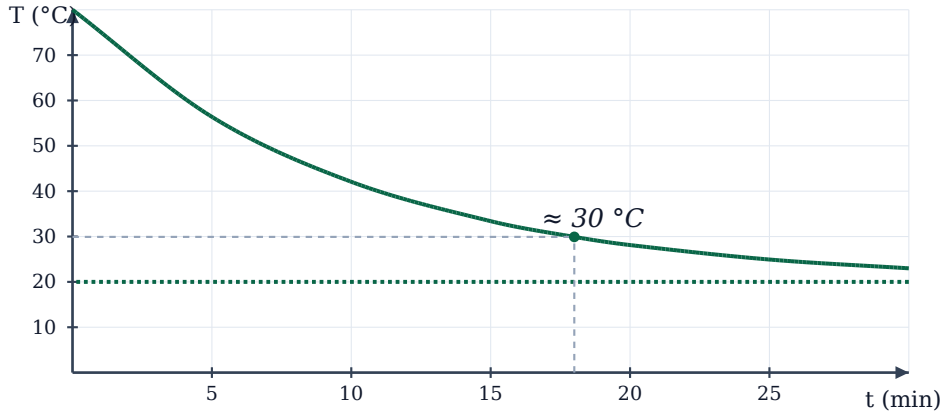
La température d'une boisson chaude, en degrés Celsius, est modélisée par $T(t) = 20 + 60\,e^{-0{,}1t}$, où t est le temps en minutes. Le graphique représente cette évolution ; la droite en pointillés a pour équation $y = 20$.

1. Quelle est la température initiale ?

2. Calcule la température au bout de 10 minutes, puis de 20 minutes.

3. Vers quelle température tend la boisson ? Interprète la droite en pointillés.

4. Au bout de combien de minutes la boisson passe-t-elle sous 30 °C ?



Exercice 19 – Une identité à démontrer

Montre que, pour tout réel x, $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

Exercice 20 – Synthèse : croissance d'une audience

Le nombre d'abonnés d'une chaîne est modélisé par $A(t) = 12\,000\,e^{0{,}15t}$, où t est le nombre de mois écoulés.

1. Calcule le nombre d'abonnés au bout d'un mois, puis de six mois.

2. Détermine le taux de croissance mensuel, puis écris $A(t)$ sous la forme $12\,000 \times q^t$.

3. Au bout de combien de mois la chaîne dépassera-t-elle 50 000 abonnés ?

4. Le modèle prévoit-il un nombre d'abonnés réaliste au bout de deux ans ? Commente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).