Fonctions polynômes du second degré — Première générale

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Un trinôme du second degré s'écrit de trois façons — développée $ax^2 + bx + c$, canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$, factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$ — et chacune répond à une question différente : la développée donne l'ordonnée à l'origine, la canonique donne le sommet et les variations, la factorisée donne les racines et le signe. Savoir passer de l'une à l'autre, c'est tout le chapitre. Ces 20 exercices installent le discriminant, la lecture d'une parabole et le tableau de signes, puis les appliquent à ce qui tombe en devoir : optimiser une aire, un bénéfice, une trajectoire. Les variations s'obtiennent ici par la forme canonique, sans dérivée — elle vient au chapitre suivant.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-generale/polynomes-second-degre

Exercice 1 – Reconnaître un trinôme et ses coefficients

Pour chaque fonction, dis s'il s'agit d'une fonction polynôme du second degré. Si oui, donne a, b, c et l'orientation de la parabole.

1. $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

2. $g(x) = -x^2 + 4$

3. $h(x) = (x - 1)(x + 3)$

4. $k(x) = 2x + 7$

5. $m(x) = 5x^2$

Exercice 2 – Calculer des images

Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Calcule $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$ et $f(0{,}5)$.

Exercice 3 – De la forme canonique à la forme développée

Développe et réduis : $f(x) = (x - 3)^2 - 4$, puis $g(x) = 2(x + 1)^2 - 8$.

Exercice 4 – Lire le sommet sur la forme canonique

Pour chaque fonction donnée sous forme canonique, donne les coordonnées du sommet, l'axe de symétrie de la parabole, et dis s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

1. $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

2. $g(x) = -2(x + 1)^2 + 5$

3. $h(x) = 3(x - 2)^2$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Premier discriminant

Résous l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ à l'aide du discriminant, puis vérifie tes solutions de deux façons.

Exercice 6 – Les trois cas du discriminant

Résous chacune de ces équations et précise à chaque fois le nombre de solutions.

1. $2x^2 - 7x + 3 = 0$

2. $x^2 - 6x + 9 = 0$

3. $x^2 + x + 1 = 0$

Exercice 7 – Factoriser un trinôme

Factorise $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$, puis résous l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 8 – Trouver la forme canonique

Écris $f(x) = x^2 - 8x + 11$ sous forme canonique, puis donne le sommet de la parabole et le minimum de f.

Exercice 9 – Tableau de signes

On pose $f(x) = x^2 - x - 6$. Détermine les racines de f, dresse son tableau de signes, puis résous $f(x) \leq 0$ et $f(x) > 0$.

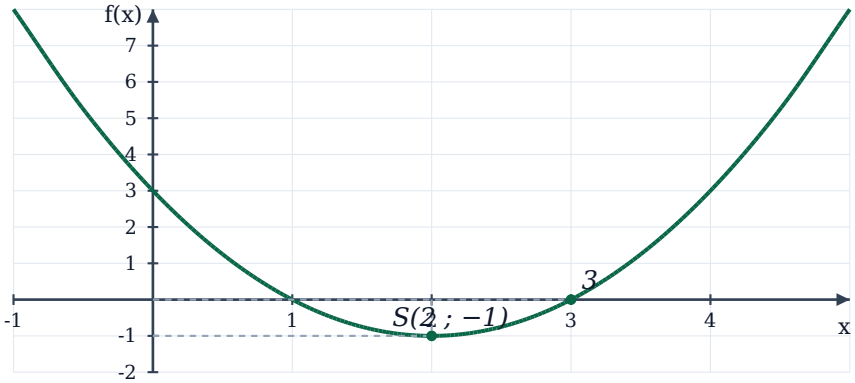
Exercice 10 – Lecture graphique d'une parabole

La parabole ci-dessous représente la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. Lis les racines de f et les coordonnées du sommet.

2. Résous graphiquement $f(x) < 0$.

3. Retrouve les racines et le sommet par le calcul.



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Variations sans dérivée

Soit $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$.

1. Écris $f(x)$ sous forme canonique.

2. Déduis-en le sommet et le sens de variation de f.

3. Quel est le maximum de f et pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 12 – Optimiser une aire

On dispose de 40 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire. On note x la largeur en mètres.

1. Exprime la longueur en fonction de x, puis l'aire $A(x)$.

2. Pour quelles valeurs de x le problème a-t-il un sens ?

3. Détermine les dimensions qui rendent l'aire maximale.

Exercice 13 – Inéquation à ramener à zéro

Résous l'inéquation $x^2 + 2x > 8$.

Exercice 14 – Intersection d'une parabole et d'une droite

Soit la parabole d'équation $y = x^2 - 2x + 3$ et la droite d'équation $y = x + 3$. Détermine les coordonnées de leurs points d'intersection.

Exercice 15 – Trajectoire d'un ballon

Un ballon est lancé depuis une hauteur de 1 m. Sa hauteur en mètres, t secondes après le lancer, est donnée par $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$. Le graphique représente cette trajectoire.

1. Quelle est la hauteur maximale atteinte, et à quel instant ?

2. À quel instant le ballon touche-t-il le sol, à 0,01 s près ?

3. Le ballon dépasse-t-il 20 m de hauteur ?



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Discuter selon un paramètre

On considère l'équation $x^2 + mx + 4 = 0$, où m est un nombre réel. Détermine, selon les valeurs de m, le nombre de solutions de cette équation.

Exercice 17 – Bénéfice d'une entreprise

Le bénéfice quotidien, en euros, d'un artisan qui produit x objets est modélisé par $B(x) = -0{,}5x^2 + 40x - 300$, pour x compris entre 0 et 100.

1. Quel est le bénéfice pour 10 objets ? Et pour 40 objets ?

2. Détermine la production qui rend le bénéfice maximal, et ce bénéfice.

3. Pour quelles productions entières l'artisan est-il bénéficiaire ?

Exercice 18 – Somme et produit des racines

Deux nombres ont pour somme 11 et pour produit 30.

1. Montre que ces deux nombres sont les racines de $x^2 - 11x + 30 = 0$, puis détermine-les.

2. Un rectangle a un périmètre de 22 cm et une aire de 30 cm². Quelles sont ses dimensions ?

3. Existe-t-il deux nombres de somme 4 et de produit 5 ?

Exercice 19 – Position d'une parabole et d'une droite

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = 2x - 3$. Détermine les positions relatives des deux courbes, c'est-à-dire les intervalles sur lesquels la parabole est au-dessus de la droite, et ceux où elle est en dessous.

Exercice 20 – Synthèse : étude complète d'un trinôme

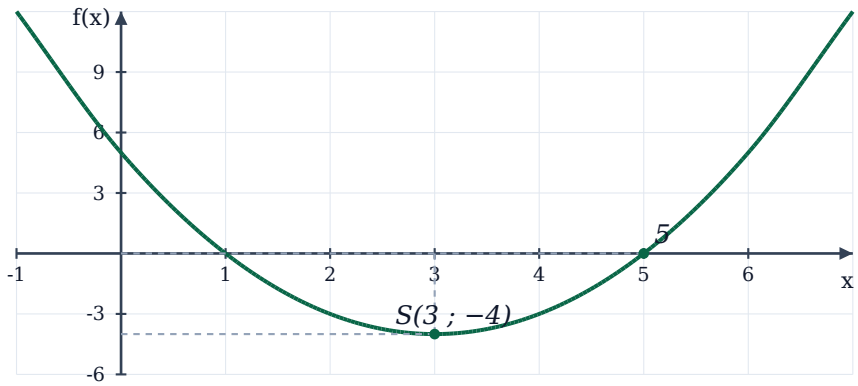
On considère $f(x) = x^2 - 6x + 5$, représentée ci-dessous.

1. Détermine les racines de f et sa forme factorisée.

2. Écris $f(x)$ sous forme canonique et donne le sommet.

3. Dresse le tableau de variations, puis le tableau de signes de f.

4. Résous l'équation $f(x) = 5$ et interprète graphiquement.



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître un trinôme et ses coefficients

Une fonction polynôme du second degré s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. C'est la présence du terme en x^2, et son coefficient non nul, qui décide.

L'orientation de la parabole dépend du seul signe de a : si $a > 0$ elle est tournée vers le HAUT (forme de vallée), si $a < 0$ vers le BAS (forme de colline).

$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$: c'est bien un trinôme, avec $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$. Comme $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

$g(x) = -x^2 + 4$: c'est un trinôme avec $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$. Le coefficient b est nul, ce qui est parfaitement autorisé. Comme $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

$h(x) = (x - 1)(x + 3)$: il faut développer avant de conclure.

$(x - 1)(x + 3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$. C'est donc un trinôme avec $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, tourné vers le haut.

$k(x) = 2x + 7$: il n'y a pas de terme en x^2, c'est une fonction affine. Ce n'est PAS un trinôme du second degré.

$m(x) = 5x^2$: c'est un trinôme avec $a = 5$, $b = 0$ et $c = 0$. Les deux coefficients peuvent être nuls en même temps, seul a ne peut pas l'être.

Contrôle utile : le coefficient c est toujours l'image de 0. Ici $f(0) = 2$, $g(0) = 4$, $h(0) = -3$, $m(0) = 0$ — cohérent avec les valeurs trouvées. ✔

Réponse. f : $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$, vers le haut · g : $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$, vers le bas · $h = x^2 + 2x - 3$: $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, vers le haut · k : fonction affine, pas un trinôme · m : $a = 5$, $b = c = 0$, vers le haut.

Rappel de cours. $a > 0 \rightarrow$ parabole tournée vers le haut (un minimum) · $a < 0 \rightarrow$ vers le bas (un maximum). Et $c = f(0)$.

Erreur fréquente. Conclure sur une forme factorisée sans développer. $(x - 1)(x + 3)$ EST un trinôme, même si aucun x^2 n'apparaît à l'écrit.

Correction de l'exercice 2 – Calculer des images

Calculer une image, c'est remplacer x par la valeur demandée en respectant les priorités : la puissance d'abord, puis les produits, enfin les sommes.

$f(0) = 2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$.

$f(1) = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0$. L'image est nulle : 1 est donc une RACINE du trinôme, information à retenir pour la suite.

$f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1$.

Attention au carré d'un nombre négatif : $(-2)^2 = 4$, et non -4. Le carré rend toujours positif.

Donc $f(-2) = 2 \times 4 + 6 + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$.

$f(0{,}5) = 2 \times 0{,}25 - 1{,}5 + 1 = 0{,}5 - 1{,}5 + 1 = 0$. Voilà une seconde racine.

Vérification par la forme factorisée : $2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$.

En développant : $2x^2 - 2x - x + 1 = 2x^2 - 3x + 1$. ✔ Cette écriture confirme les deux racines $x = 0{,}5$ et $x = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur classique à éviter : écrire $-3 \times (-2) = -6$. Le produit de deux nombres négatifs est positif, donc $+6$.

Réponse. $f(0) = 1$; $f(1) = 0$; $f(-2) = 15$; $f(0{,}5) = 0$.

Rappel de cours. $(-x)^2 = x^2$: le carré efface le signe. C'est le point qui fait perdre le plus de points sur les calculs d'images.

Erreur fréquente. Calculer -2^2 au lieu de $(-2)^2$. Sans parenthèses, la calculatrice renvoie -4 : il faut les mettre.

Correction de l'exercice 3 – De la forme canonique à la forme développée

On utilise les identités remarquables : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Pour f : $(x-3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$.

Donc $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$.

Pour g, on développe d'abord le carré, puis on multiplie par 2 : $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

$2(x+1)^2 = 2x^2 + 4x + 2$. Le facteur 2 doit multiplier les TROIS termes.

Donc $g(x) = 2x^2 + 4x + 2 - 8 = 2x^2 + 4x - 6$.

Vérification de f en un point : $f(3) = (3-3)^2 - 4 = -4$ avec la forme canonique, et $9 - 18 + 5 = -4$ avec la forme développée. ✔

Vérification de g : $g(0) = 2 \times 1 - 8 = -6$, et la forme développée donne $c = -6$. ✔

Ce que montrent ces deux calculs : la forme canonique et la forme développée décrivent la MÊME fonction. On choisit l'écriture selon la question posée.

Réponse. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ et $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

Rappel de cours. $(x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$: le double produit est la source d'erreur numéro un, ne jamais l'oublier.

Erreur fréquente. Écrire $2(x+1)^2 = (2x+2)^2$. Le coefficient multiplie le carré une fois développé, il n'entre pas dans le carré.

Correction de l'exercice 4 – Lire le sommet sur la forme canonique

La forme canonique s'écrit $a(x-\alpha)^2 + \beta$. Le sommet de la parabole a alors pour coordonnées $(\alpha\,;\beta)$, et l'axe de symétrie a pour équation $x = \alpha$.

Pourquoi ? Parce que $(x-\alpha)^2$ est toujours positif ou nul, et vaut 0 uniquement pour $x = \alpha$. C'est donc là que l'expression atteint sa valeur extrême.

$f(x) = (x-3)^2 - 4$: ici $\alpha = 3$ et $\beta = -4$, donc le sommet est $S(3\,;-4)$ et l'axe est $x = 3$.

Comme $a = 1 > 0$, le terme $(x-3)^2$ ne peut qu'ajouter : $f(x) \geq -4$. Il s'agit d'un MINIMUM, atteint en $x = 3$.

$g(x) = -2(x+1)^2 + 5$: attention au signe, $(x+1)$ s'écrit $(x-(-1))$, donc $\alpha = -1$ et $\beta = 5$. Sommet $S(-1\,;5)$, axe $x = -1$.

Comme $a = -2 < 0$, le terme $-2(x+1)^2$ ne peut que retrancher : $g(x) \leq 5$. Il s'agit d'un MAXIMUM.

$h(x) = 3(x-2)^2$: on peut l'écrire $3(x-2)^2 + 0$, donc $\alpha = 2$ et $\beta = 0$. Sommet $S(2\,;0)$, axe $x = 2$, et $a = 3 > 0$ donne un minimum.

Cas particulier de h : le sommet est SUR l'axe des abscisses, donc la parabole le touche sans le traverser. Le trinôme a une racine double, $x = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Vérification sur g : $g(-1) = -2 \times 0 + 5 = 5$ ✔, et $g(0) = -2 + 5 = 3 < 5$ ✔ — la valeur au sommet est bien la plus grande.

Réponse. f : $S(3\,;-4)$, axe $x = 3$, minimum -4 · g : $S(-1\,;5)$, axe $x = -1$, maximum 5 · h : $S(2\,;0)$, axe $x = 2$, minimum 0.

Rappel de cours. $a(x-\alpha)^2+\beta$: sommet $(\alpha\,;\beta)$. Le signe de a décide seul entre minimum et maximum.

Erreur fréquente. Lire $\alpha = 1$ dans $(x+1)^2$. La forme de référence est $(x-\alpha)^2$, donc $\alpha = -1$: le signe s'inverse.

Correction de l'exercice 5 – Premier discriminant

On identifie les coefficients : $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.

Le discriminant se calcule par $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet DEUX solutions distinctes, données par $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ici $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$, donc $x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$.

Attention au signe : $-b = -(-5) = +5$. Oublier ce double signe donnerait des solutions négatives, donc fausses.

Première vérification, en remplaçant : $2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ ✔ et $3^2 - 15 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$ ✔.

Seconde vérification, par la somme et le produit des racines : leur somme doit valoir $-\dfrac{b}{a} = 5$ et leur produit $\dfrac{c}{a} = 6$.

Or $2 + 3 = 5$ ✔ et $2 \times 3 = 6$ ✔. Les deux contrôles concordent.

Ce second contrôle est très rapide et détecte immédiatement une erreur de signe : il vaut la peine d'être fait systématiquement.

Réponse. $\Delta = 1$, donc $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.

Rappel de cours. $\Delta = b^2 - 4ac$ puis $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Contrôle instantané : somme $= -\dfrac{b}{a}$, produit $= \dfrac{c}{a}$.

Erreur fréquente. Écrire $x = \dfrac{-5 \pm 1}{2}$ en oubliant que $-b$ vaut $+5$. On trouverait -2 et -3, qui ne vérifient pas l'équation.

Correction de l'exercice 6 – Les trois cas du discriminant

Le signe du discriminant décide du nombre de solutions : $\Delta > 0 \rightarrow$ deux solutions, $\Delta = 0 \rightarrow$ une solution double, $\Delta < 0 \rightarrow$ aucune solution réelle.

Première équation : $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$, donc $\Delta = 49 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25$.

$\Delta > 0$ et $\sqrt{25} = 5$, donc $x_1 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$ et $x_2 = \dfrac{7+5}{4} = 3$.

Contrôle par la somme : $0{,}5 + 3 = 3{,}5 = \dfrac{7}{2} = -\dfrac{b}{a}$ ✔.

Deuxième équation : $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$, donc $\Delta = 36 - 36 = 0$.

$\Delta = 0$: il y a une racine double, $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$.

On pouvait le voir directement : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, et un carré est nul uniquement si

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

son contenu l'est. ✔

Géométriquement, ce cas correspond à une parabole dont le sommet touche l'axe des abscisses sans le traverser.

Troisième équation : $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, donc $\Delta = 1 - 4 = -3$.

$\Delta < 0$: l'équation n'a AUCUNE solution réelle. La parabole ne coupe jamais l'axe des abscisses.

Confirmation par la forme canonique : $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, une somme d'un carré et d'un nombre strictement positif, donc toujours $\geq 0{,}75$. ✔

Réponse. a) $\Delta = 25$, $x = 0{,}5$ ou $x = 3$ · b) $\Delta = 0$, racine double $x = 3$ · c) $\Delta = -3$, aucune solution réelle.

Rappel de cours. $\Delta > 0$: deux racines · $\Delta = 0$: une racine double $-\frac{b}{2a}$ · $\Delta < 0$: aucune racine. Le calcul du discriminant précède toujours celui des racines.

Erreur fréquente. Écrire « $\Delta = 0$ donc pas de solution ». Le cas $\Delta = 0$ donne bien une solution, comptée double : c'est $\Delta < 0$ qui n'en donne aucune.

Correction de l'exercice 7 – Factoriser un trinôme

Pour factoriser, on cherche d'abord les racines. $a = 3$, $b = -12$, $c = 9$.

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 9 = 144 - 108 = 36$.

$\sqrt{36} = 6$, donc $x_1 = \frac{12 - 6}{6} = 1$ et $x_2 = \frac{12 + 6}{6} = 3$.

La forme factorisée est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, soit ici $f(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.

Le coefficient a ne doit surtout pas être oublié : sans lui, on obtiendrait $x^2 - 4x + 3$, qui n'est pas la fonction de départ.

Vérification en développant : $3(x - 1)(x - 3) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3x^2 - 12x + 9$. ✔

Pour l'inéquation, on utilise la règle du signe d'un trinôme : il est du signe de a à l'EXTÉRIEUR des racines, et du signe contraire à l'INTÉRIEUR.

Ici $a = 3 > 0$, donc $f(x)$ est positif avant 1 et après 3, et négatif entre 1 et 3.

L'inéquation $f(x) \leq 0$ est donc vérifiée pour $x \in [1\,;3]$, les bornes étant incluses puisque l'inégalité est large et que f s'y annule.

Vérification en testant un point intérieur : $f(2) = 12 - 24 + 9 = -3 \leq 0$ ✔.

Vérification en testant un point extérieur : $f(0) = 9 > 0$, donc 0 ne convient pas ✔ — cohérent avec la solution trouvée.

Réponse. $f(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ et $f(x) \leq 0$ pour $x \in [1\,;3]$.

Rappel de cours. Signe d'un trinôme : du signe de a à l'extérieur des racines, du signe opposé entre elles. « À l'intérieur, c'est le contraire ».

Erreur fréquente. Écrire $f(x) = (x - 1)(x - 3)$ en oubliant le facteur $a = 3$. Le signe reste correct, mais la fonction est fausse.

Correction de l'exercice 8 – Trouver la forme canonique

Méthode dite de « complétion du carré » : on reconstitue une identité remarquable à partir des deux premiers termes.

On cherche le carré qui commence par $x^2 - 8x$. Comme $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$, c'est $(x - 4)^2$ qu'il faut.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le nombre 4 s'obtient en divisant par 2 le coefficient de x : $-8 \div 2 = -4$.

On écrit alors $x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$, en retranchant le 16 ajouté en trop.

Donc $f(x) = (x-4)^2 - 16 + 11 = (x-4)^2 - 5$.

Vérification en redéveloppant : $(x-4)^2 - 5 = x^2 - 8x + 16 - 5 = x^2 - 8x + 11$. ✔

Lecture directe : $\alpha = 4$ et $\beta = -5$, donc le sommet est $S(4\,;-5)$.

Comme $a = 1 > 0$, la fonction admet un MINIMUM valant -5, atteint pour $x = 4$.

Deuxième vérification, par le calcul d'image : $f(4) = 16 - 32 + 11 = -5$. ✔

Contrôle de cohérence : $f(3) = 9 - 24 + 11 = -4$ et $f(5) = 25 - 40 + 11 = -4$. Ces deux valeurs sont égales et supérieures à -5, ce qui confirme à la fois le minimum et la symétrie autour de $x = 4$. ✔

Remarque : l'abscisse du sommet peut aussi se calculer par la formule $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{8}{2} = 4$, puis $\beta = f(4) = -5$. C'est souvent plus rapide.

Réponse. $f(x) = (x-4)^2 - 5$, sommet $S(4\,;-5)$, minimum -5 atteint en $x = 4$.

Rappel de cours. $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$: deux calculs suffisent pour la forme canonique, sans complétion du carré.

Erreur fréquente. Écrire $x^2 - 8x = (x-4)^2$. Il manque la compensation : le développement ajoute 16, qu'il faut retrancher.

Correction de l'exercice 9 – Tableau de signes

Racines : $a = 1$, $b = -1$, $c = -6$, donc $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$.

Attention au signe : $-4ac = -4 \times 1 \times (-6) = +24$. Deux signes moins donnent un plus.

$\sqrt{25} = 5$, donc $x_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$.

Contrôle : somme $-2 + 3 = 1 = -\dfrac{b}{a}$ ✔ et produit $-2 \times 3 = -6 = \dfrac{c}{a}$ ✔.

Forme factorisée : $f(x) = (x+2)(x-3)$.

Tableau de signes, sur $]-\infty\,;-2[$: les deux facteurs sont négatifs, leur produit est positif.

Sur $]-2\,;3[$: $(x+2)$ est positif et $(x-3)$ négatif, donc le produit est négatif.

Sur $]3\,;+\infty[$: les deux facteurs sont positifs, le produit est positif.

On retrouve la règle générale : le trinôme est du signe de a (positif ici) à l'extérieur des racines, et du signe contraire entre elles.

Solutions : $f(x) \leq 0$ pour $x \in [-2\,;3]$, et $f(x) > 0$ pour $x \in]-\infty\,;-2[\cup]3\,;+\infty[$.

Vérification par un point test dans chaque zone : $f(-3) = 9 + 3 - 6 = 6 > 0$ ✔, $f(0) = -6 < 0$ ✔, $f(4) = 16 - 4 - 6 = 6 > 0$ ✔.

Attention aux crochets : l'inégalité large $\leq$ inclut les racines, l'inégalité stricte $>$ les exclut. C'est une source récurrente de points perdus.

Réponse. Racines -2 et 3, donc $f(x) = (x+2)(x-3)$ · $f(x) \leq 0$ sur $[-2\,;3]$ · $f(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-2[\cup]3\,;+\infty[$.

Rappel de cours. Un test numérique dans chaque intervalle valide un tableau de signes en trois calculs. À faire systématiquement.

Erreur fréquente. Se tromper de signe dans Δ en écrivant $1 - 24 = -23$ et conclure « pas de racine ». Le produit $-4ac$ est ici positif.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Lecture graphique d'une parabole

Les racines sont les abscisses des points où la courbe COUPE l'axe des abscisses. On lit $x = 1$ et $x = 3$.

Le sommet est le point le plus bas de la courbe : on lit $S(2\,;-1)$.

Contrôle immédiat : l'abscisse du sommet est le milieu des deux racines, $\frac{1+3}{2} = 2$. ✔

C'est une conséquence de la symétrie de la parabole.

Pour $f(x) < 0$, on cherche les valeurs de x pour lesquelles la courbe est STRICTEMENT en dessous de l'axe des abscisses.

C'est le cas entre les deux racines, donc la solution est $]1\,;3[$, bornes exclues car en 1 et 3 la fonction vaut 0, pas moins.

Vérification par le calcul des racines : $\Delta = 16 - 12 = 4$, donc $\sqrt{\Delta} = 2$.

$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. ✔ Les lectures graphiques sont confirmées.

Sommet par le calcul : $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$, puis $\beta = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$. ✔

Forme canonique correspondante : $f(x) = (x-2)^2 - 1$, qu'on peut aussi obtenir en développant pour contrôler.

Forme factorisée : $f(x) = (x-1)(x-3)$. Les trois écritures cohabitent et donnent chacune une lecture différente de la même parabole.

Réponse. Racines 1 et 3, sommet $S(2\,;-1)$ · $f(x) < 0$ sur $]1\,;3[$ · confirmé par $\Delta = 4$ et $\alpha = -\frac{b}{2a} = 2$.

Rappel de cours. L'abscisse du sommet est toujours le milieu des racines quand elles existent : $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Erreur fréquente. Inclure les bornes dans la solution de $f(x) < 0$. En $x = 1$ et $x = 3$, f vaut exactement 0 : l'inégalité stricte les exclut.

Correction de l'exercice 11 – Variations sans dérivée

On factorise d'abord par $a = -2$ les deux premiers termes : $-2x^2 + 8x = -2\left(x^2 - 4x\right)$.

Attention au signe : $8x$ divisé par -2 donne $-4x$. C'est l'étape où les erreurs se produisent.

On complète le carré à l'intérieur : $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$.

Donc $-2\Big[(x-2)^2 - 4\Big] = -2(x-2)^2 + 8$.

En ajoutant le -3 restant : $f(x) = -2(x-2)^2 + 8 - 3 = -2(x-2)^2 + 5$.

Vérification en développant : $-2(x^2 - 4x + 4) + 5 = -2x^2 + 8x - 8 + 5 = -2x^2 + 8x - 3$. ✔

Le sommet est donc $S(2\,;5)$, et l'axe de symétrie a pour équation $x = 2$.

Sens de variation : comme $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas. La fonction est donc CROISSANTE sur $]-\infty\,;2]$ puis DÉCROISSANTE sur $[2\,;+\infty[$.

Justification sans dérivée : $(x-2)^2$ diminue quand x se rapproche de 2 et augmente quand il s'en éloigne ; multiplié par -2, le sens s'inverse.

Le maximum vaut donc 5, atteint pour $x = 2$.

Vérification numérique : $f(2) = -8 + 16 - 3 = 5$ ✔, $f(1) = -2 + 8 - 3 = 3$ et $f(3) = -18 + 24 - 3 = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Ces deux dernières valeurs sont égales et inférieures à 5 : la symétrie autour de $x = 2$ et le maximum sont confirmés. ✔

Réponse. $f(x) = -2(x-2)^2 + 5$, sommet $S(2\,;5)$ · croissante sur $]-\infty\,;2]$, décroissante sur $[2\,;+\infty[$ · maximum 5 atteint en $x = 2$.

Rappel de cours. $a < 0$: croissante puis décroissante (maximum au sommet). $a > 0$: décroissante puis croissante (minimum au sommet).

Erreur fréquente. Oublier de multiplier le -4 par -2 en sortant du crochet. On obtiendrait $+1$ au lieu de $+5$ comme valeur maximale.

Correction de l'exercice 12 – Optimiser une aire

Le périmètre d'un rectangle vaut 2 × (largeur + longueur), et il doit être égal à 40 m.

Donc largeur + longueur = 20, et la longueur vaut $20 - x$.

Aire : $A(x) = x(20-x) = 20x - x^2$, soit $A(x) = -x^2 + 20x$.

Domaine : il faut $x > 0$ (une largeur est positive) et $20 - x > 0$, donc $x < 20$. Le problème a un sens pour $x \in\,]0\,;20[$.

Cette question n'est pas décorative : sans elle, on pourrait « trouver » des dimensions négatives.

Pour le maximum, on met A sous forme canonique. $-x^2 + 20x = -\left(x^2 - 20x\right)$.

$x^2 - 20x = (x-10)^2 - 100$, donc $A(x) = -\Big[(x-10)^2 - 100\Big] = -(x-10)^2 + 100$.

Comme $a = -1 < 0$, l'aire est maximale au sommet : $A_{\max} = 100$ m², atteinte pour $x = 10$ m.

Dimensions correspondantes : largeur 10 m et longueur $20 - 10 = 10$ m. L'enclos optimal est donc un CARRÉ.

Vérification que $x = 10$ appartient bien au domaine $]0\,;20[$. ✔

Contrôle par comparaison : $x = 8$ donne $8 \times 12 = 96$ m², $x = 9$ donne $9 \times 11 = 99$ m², $x = 10$ donne 100 m², $x = 12$ donne $12 \times 8 = 96$ m². ✔ Le maximum est bien en 10.

Résultat général qu'il est utile de connaître : à périmètre fixé, c'est toujours le carré qui donne l'aire maximale parmi les rectangles.

Réponse. Longueur $= 20 - x$ et $A(x) = -x^2 + 20x = -(x-10)^2 + 100$ · domaine $]0\,;20[$ · aire maximale de 100 m² pour un carré de 10 m de côté.

Rappel de cours. Optimiser un trinôme, c'est trouver son sommet : on passe par la forme canonique, ou directement par $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

Erreur fréquente. Écrire longueur $= 40 - x$ en confondant périmètre et demi-périmètre. Le périmètre comporte DEUX largeurs et DEUX longueurs.

Correction de l'exercice 13 – Inéquation à ramener à zéro

On ne peut pas étudier le signe d'un trinôme tant que l'inéquation n'est pas comparée à ZÉRO. C'est la première étape, obligatoire.

On retranche 8 aux deux membres : $x^2 + 2x - 8 > 0$.

On étudie donc le signe de $f(x) = x^2 + 2x - 8$, avec $a = 1$, $b = 2$, $c = -8$.

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36$.

$\sqrt{36} = 6$, donc $x_1 = \dfrac{-2-6}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-2+6}{2} = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : somme $-4 + 2 = -2 = -\frac{b}{a}$ ✔ et produit $-4 \times 2 = -8 = \frac{c}{a}$ ✔.

Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

L'inéquation $f(x) > 0$ est donc vérifiée pour $x < -4$ ou $x > 2$, c'est-à-dire $S =]-\infty\,;-4[\cup]2\,;+\infty[$.

Les bornes sont exclues car l'inégalité est stricte et le trinôme s'annule en -4 et 2.

Vérification avec $x = 3$: $9 + 6 = 15 > 8$ ✔. Avec $x = -5$: $25 - 10 = 15 > 8$ ✔.

Vérification qu'une valeur intérieure ne convient pas, avec $x = 0$: $0 > 8$ est faux ✔ — cohérent, puisque 0 est entre les racines.

Erreur à éviter absolument : « simplifier » par x pour obtenir $x + 2 > 8$. On ne divise jamais une inéquation par une expression dont le signe est inconnu — et cela ferait de plus disparaître une solution.

Réponse. $S =]-\infty\,;-4[\cup]2\,;+\infty[$.

Rappel de cours. Toute inéquation du second degré se ramène d'abord à « … > 0 » ou « … < 0 », puis se résout par le tableau de signes.

Erreur fréquente. Diviser les deux membres par x. Le signe de x est inconnu, donc le sens de l'inégalité aussi : la manipulation est interdite.

Correction de l'exercice 14 – Intersection d'une parabole et d'une droite

Un point d'intersection appartient aux deux courbes : son abscisse vérifie donc simultanément les deux équations.

On égalise les ordonnées : $x^2 - 2x + 3 = x + 3$.

On ramène tout dans le même membre : $x^2 - 2x + 3 - x - 3 = 0$, soit $x^2 - 3x = 0$.

Ici, inutile de sortir le discriminant : on peut factoriser directement par x, c'est plus rapide et sans risque d'erreur.

$x(x - 3) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 3$.

Contrôle par le discriminant, pour la sécurité : $\Delta = 9 - 0 = 9$, donc $x = \frac{3 \pm 3}{2}$, soit 0 et 3.

✔ Les deux méthodes concordent.

Il reste à calculer les ordonnées, en utilisant l'équation la plus simple — celle de la droite.

Pour $x = 0$: $y = 0 + 3 = 3$, donc le premier point est $A(0\,;3)$.

Pour $x = 3$: $y = 3 + 3 = 6$, donc le second point est $B(3\,;6)$.

Vérification avec l'équation de la parabole : $0 - 0 + 3 = 3$ ✔ pour A, et $9 - 6 + 3 = 6$ ✔ pour B. Les points appartiennent bien aux deux courbes.

Interprétation : le discriminant de l'équation obtenue indique le nombre de points d'intersection — deux si $\Delta > 0$, un seul (tangence) si $\Delta = 0$, aucun si $\Delta < 0$.

Réponse. Deux points d'intersection : $A(0\,;3)$ et $B(3\,;6)$.

Rappel de cours. Intersection de deux courbes : on égalise les deux expressions, on ramène à zéro, on résout. Puis on calcule les ordonnées.

Erreur fréquente. Donner uniquement les abscisses 0 et 3. La question demande des COORDONNÉES : il faut les deux nombres pour chaque point.

Correction de l'exercice 15 – Trajectoire d'un ballon

Pour la hauteur maximale, on cherche le sommet. Comme $a = -5 < 0$, la parabole est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

tournée vers le bas : le sommet est bien un maximum.

Abscisse du sommet : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{20}{2 \times (-5)} = -\dfrac{20}{-10} = 2$.

Hauteur correspondante : $h(2) = -5 \times 4 + 40 + 1 = -20 + 41 = 21$ m.

Le ballon atteint donc 21 m au bout de 2 secondes.

Forme canonique correspondante : $h(t) = -5(t-2)^2 + 21$, qu'on peut vérifier en développant : $-5(t^2 - 4t + 4) + 21 = -5t^2 + 20t - 20 + 21$ ✔.

Le ballon touche le sol quand $h(t) = 0$, donc on résout $-5t^2 + 20t + 1 = 0$.

$\Delta = 20^2 - 4 \times (-5) \times 1 = 400 + 20 = 420$.

$\sqrt{420} \approx 20{,}4939$, donc $t_1 = \dfrac{-20 - 20{,}4939}{-10} \approx 4{,}049$ et $t_2 = \dfrac{-20 + 20{,}4939}{-10} \approx -0{,}049$.

La solution négative n'a pas de sens physique : elle correspond à un instant avant le lancer. On la REJETTE.

Le ballon touche donc le sol au bout d'environ 4,05 secondes.

Vérification : $h(4) = -80 + 80 + 1 = 1$ m (encore en l'air) et $h(4{,}1) = -84{,}05 + 82 + 1 = -1{,}05$ (déjà sous le sol). L'instant cherché est bien entre les deux. ✔

Pour la dernière question, on utilise la forme canonique : $h(t) = -5(t-2)^2 + 21 > 20$ équivaut à $-5(t-2)^2 > -1$.

En divisant par -5, nombre négatif, le sens de l'inégalité s'inverse : $(t-2)^2 < 0{,}2$.

Comme $\sqrt{0{,}2} \approx 0{,}447$, cela donne $|t-2| < 0{,}447$, soit t entre 1,553 s et 2,447 s environ.

Le ballon dépasse donc bien 20 m, pendant environ 0,89 seconde autour de son point culminant.

Réponse. Hauteur maximale 21 m atteinte à $t = 2$ s · le ballon touche le sol à $t \approx 4{,}05$ s (la racine négative est rejetée) · il dépasse 20 m entre $t \approx 1{,}55$ s et $t \approx 2{,}45$ s.

Rappel de cours. Dans un problème concret, on vérifie toujours que les solutions ont un sens : un temps négatif, une longueur négative ou un effectif décimal se rejettent.

Erreur fréquente. Diviser par -5 sans inverser le sens de l'inégalité. On conclurait que le ballon ne dépasse jamais 20 m, ce que le graphique dément.

Correction de l'exercice 16 – Discuter selon un paramètre

Le nombre de solutions dépend du seul signe du discriminant, qu'on exprime en fonction de m.

Ici $a = 1$, $b = m$, $c = 4$, donc $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 4 = m^2 - 16$.

Il faut donc étudier le signe de $m^2 - 16$, qui est lui-même un trinôme en m.

On le factorise avec l'identité remarquable : $m^2 - 16 = (m-4)(m+4)$.

Ses racines sont $m = 4$ et $m = -4$, et son coefficient dominant vaut $1 > 0$: il est donc positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

Premier cas : $m < -4$ ou $m > 4$. Alors $\Delta > 0$ et l'équation admet DEUX solutions distinctes.

Deuxième cas : $m = -4$ ou $m = 4$. Alors $\Delta = 0$ et l'équation admet UNE solution double.

Troisième cas : $-4 < m < 4$. Alors $\Delta < 0$ et l'équation n'admet AUCUNE solution réelle.

Vérification du cas $m = 4$: l'équation devient $x^2 + 4x + 4 = 0$, soit $(x+2)^2 = 0$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$x = -2$, racine double. ✔

Vérification du cas $m = 0$ (situé entre -4 et 4) : l'équation devient $x^2 + 4 = 0$, soit $x^2 = -4$, effectivement impossible. ✔

Vérification du cas $m = 5$: $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$, et les solutions sont $\frac{-5 \pm 3}{2}$, c'est-à-dire -1 et -4. ✔

Interprétation graphique : la parabole $y = x^2 + mx + 4$ coupe l'axe des abscisses en deux points, le touche, ou l'évite, selon la valeur de m.

Point de méthode à retenir : quand un énoncé contient un paramètre, on garde le raisonnement habituel — c'est l'étude du SIGNE du discriminant qui remplace son simple calcul.

Réponse. $\Delta = m^2 - 16$ · deux solutions si $m < -4$ ou $m > 4$ · une solution double si $m = -4$ ou $m = 4$ · aucune solution si $-4 < m < 4$.

Rappel de cours. Avec un paramètre, le discriminant devient une expression à étudier en signe : le nombre de solutions se discute par intervalles.

Erreur fréquente. Résoudre $m^2 - 16 = 0$ et s'arrêter là en donnant $m = \pm 4$. La question porte sur TOUTES les valeurs de m, donc sur le signe, pas seulement l'annulation.

Correction de l'exercice 17 – Bénéfice d'une entreprise

Pour 10 objets : $B(10) = -0{,}5 \times 100 + 400 - 300 = -50 + 100 = 50$ €.

Pour 40 objets : $B(40) = -0{,}5 \times 1\,600 + 1\,600 - 300 = -800 + 1\,300 = 500$ €.

Pour le maximum, on calcule l'abscisse du sommet : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{2 \times (-0{,}5)} = -\frac{40}{-1} = 40$.

Comme $a = -0{,}5 < 0$, le sommet est bien un maximum. Le bénéfice maximal vaut donc $B(40) = 500$ €, ce qu'on vient de calculer.

Forme canonique correspondante : $B(x) = -0{,}5(x - 40)^2 + 500$, qu'on vérifie en développant : $-0{,}5(x^2 - 80x + 1600) + 500 = -0{,}5x^2 + 40x - 800 + 500$ ✔.

« Être bénéficiaire » signifie $B(x) > 0$. On résout donc $-0{,}5x^2 + 40x - 300 > 0$.

Pour simplifier, on multiplie les deux membres par -2, ce qui INVERSE le sens de l'inégalité : $x^2 - 80x + 600 < 0$.

$\Delta = 80^2 - 4 \times 1 \times 600 = 6\,400 - 2\,400 = 4\,000$, donc $\sqrt{\Delta} \approx 63{,}2456$.

$x_1 = \frac{80 - 63{,}2456}{2} \approx 8{,}377$ et $x_2 = \frac{80 + 63{,}2456}{2} \approx 71{,}623$.

Le trinôme $x^2 - 80x + 600$ a un coefficient dominant positif : il est négatif ENTRE ses racines. La condition est donc $8{,}377 < x < 71{,}623$.

Comme le nombre d'objets est un entier, l'artisan est bénéficiaire pour x allant de 9 à 71 objets.

Vérification aux bornes : $B(8) = -32 + 320 - 300 = -12$ € (perte) et $B(9) = -40{,}5 + 360 - 300 = 19{,}5$ € (bénéfice). ✔

Vérification à l'autre extrémité : $B(71) = -2\,520{,}5 + 2\,840 - 300 = 19{,}5$ € et $B(72) = -2\,592 + 2\,880 - 300 = -12$ €. ✔

Remarque de lecture : la symétrie des valeurs (19,5 € en 9 et en 71) n'est pas un hasard — ces deux abscisses sont symétriques par rapport à $x = 40$, l'axe de la parabole.

Réponse. $B(10) = 50$ € et $B(40) = 500$ € · bénéfice maximal de 500 € pour 40 objets · l'artisan est bénéficiaire de 9 à 71 objets.

Rappel de cours. Multiplier une inéquation par un nombre négatif en inverse le sens.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

C’est souvent le moyen le plus sûr de se ramener à un coefficient dominant positif.

Erreur fréquente. Donner l’intervalle [8,38 ; 71,62] comme réponse finale. Le nombre d’objets est ENTIER : il faut conclure par 9 à 71.

Correction de l’exercice 18 – Somme et produit des racines

On note u et v les deux nombres, avec $u + v = 11$ et $uv = 30$.

Développons $(x - u)(x - v) = x^2 - (u + v)x + uv$. En remplaçant, on obtient $x^2 - 11x + 30$.

Donc u et v sont exactement les racines de $x^2 - 11x + 30 = 0$. C’est la traduction des relations somme-produit.

Résolution : $\Delta = 121 - 120 = 1$, donc $\sqrt{\Delta} = 1$ et les racines sont $\frac{11 - 1}{2} = 5$ et $\frac{11 + 1}{2} = 6$.

Vérification : $5 + 6 = 11$ ✔ et $5 \times 6 = 30$ ✔.

Pour le rectangle : le périmètre vaut 22 cm, donc la somme de la largeur et de la longueur vaut 11 cm — c’est le demi-périmètre.

L’aire vaut 30 cm², donc le produit des deux dimensions vaut 30.

On retrouve exactement le problème précédent : les dimensions sont 5 cm et 6 cm.

Vérification : périmètre $= 2 \times (5 + 6) = 22$ cm ✔ et aire $= 5 \times 6 = 30$ cm². ✔

Dernière question : deux nombres de somme 4 et de produit 5 seraient racines de $x^2 - 4x + 5 = 0$.

$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$: cette équation n’a aucune solution réelle. De tels nombres n’existent donc pas.

Interprétation concrète : aucun rectangle n’a un périmètre de 8 cm et une aire de 5 cm². Le maximum d’aire pour ce périmètre est celui du carré de côté 2, soit 4 cm² — inférieur à 5.

Ce que le discriminant mesure ici : la COMPATIBILITÉ des deux contraintes. Un discriminant négatif signale une situation impossible, pas une erreur de calcul.

Réponse. Les deux nombres sont 5 et 6 · le rectangle mesure 5 cm sur 6 cm · il n’existe pas de nombres de somme 4 et de produit 5 ($\Delta = -4 < 0$).

Rappel de cours. Deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de $x^2 - Sx + P = 0$. Ils existent si et seulement si $S^2 - 4P \geq 0$.

Erreur fréquente. Utiliser le périmètre 22 au lieu du demi-périmètre 11 comme somme. Le périmètre compte chaque dimension deux fois.

Correction de l’exercice 19 – Position d’une parabole et d’une droite

Comparer deux courbes revient à étudier le SIGNE de leur différence : $f(x) - g(x)$.

Si $f(x) - g(x) > 0$, la parabole est au-dessus ; si la différence est négative, elle est en dessous ; si elle est nulle, les courbes se coupent.

Calcul de la différence : $f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 5 - (2x - 3)$.

Attention à distribuer le signe moins : $= x^2 - 4x + 5 - 2x + 3 = x^2 - 6x + 8$.

On étudie donc le signe de $d(x) = x^2 - 6x + 8$, avec $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$.

$\Delta = 36 - 32 = 4$, donc $\sqrt{\Delta} = 2$, et les racines sont $x_1 = \frac{6 - 2}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{6 + 2}{2} = 4$.

Contrôle : somme $2 + 4 = 6$ ✔ et produit $2 \times 4 = 8$ ✔.

Comme $a = 1 > 0$, la différence est positive à l’extérieur des racines et négative entre elles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Conclusion : la parabole est au-dessus de la droite sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]4\,;+\infty[$, et en dessous sur $]2\,;4[$.

Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses 2 et 4.

Coordonnées de ces points, calculées avec la droite (plus simple) : $g(2) = 1$ et $g(4) = 5$, donc les points d'intersection sont $(2\,;1)$ et $(4\,;5)$.

Vérification avec la parabole : $f(2) = 4 - 8 + 5 = 1$ ✔ et $f(4) = 16 - 16 + 5 = 5$ ✔.

Vérification du signe par un point test intérieur, $x = 3$: $f(3) = 9 - 12 + 5 = 2$ et $g(3) = 3$. Comme $2 < 3$, la parabole est bien en dessous sur cet intervalle. ✔

Point test extérieur, $x = 0$: $f(0) = 5$ et $g(0) = -3$, donc la parabole est bien au-dessus. ✔

Réponse. $f(x) - g(x) = x^2 - 6x + 8$, de racines 2 et 4 · la parabole est au-dessus de la droite sur $]-\infty\,;2[\cup]4\,;+\infty[$ et en dessous sur $]2\,;4[$ · elles se coupent en $(2\,;1)$ et $(4\,;5)$.

Rappel de cours. Position relative de deux courbes = signe de la différence. On ne compare jamais deux expressions « à vue ».

Erreur fréquente. Oublier les parenthèses en soustrayant $g(x)$ et écrire $x^2 - 4x + 5 - 2x - 3$. On obtiendrait $x^2 - 6x + 2$ et des racines fausses.

Correction de l'exercice 20 – Synthèse : étude complète d'un trinôme

Racines : $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$, donc $\Delta = 36 - 20 = 16$.

$\sqrt{16} = 4$, donc $x_1 = \dfrac{6-4}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{6+4}{2} = 5$.

Contrôle : somme $1 + 5 = 6$ ✔ et produit $1 \times 5 = 5$ ✔. Forme factorisée : $f(x) = (x-1)(x-5)$.

Forme canonique : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 3$, puis $\beta = f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$.

Donc $f(x) = (x-3)^2 - 4$, et le sommet est $S(3\,;-4)$.

Vérification en développant : $x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$ ✔. Et contrôle de cohérence : 3 est bien le milieu de 1 et 5. ✔

Variations : comme $a = 1 > 0$, la fonction est DÉCROISSANTE sur $]-\infty\,;3]$, puis CROISSANTE sur $[3\,;+\infty[$, avec un minimum de -4 en $x = 3$.

Signes : le trinôme est du signe de a (donc positif) à l'extérieur des racines, et négatif entre elles.

Ainsi $f(x) > 0$ sur $]-\infty\,;1[\cup]5\,;+\infty[$, $f(x) < 0$ sur $]1\,;5[$, et f s'annule en 1 et 5.

Vérification par points tests : $f(0) = 5 > 0$ ✔, $f(3) = -4 < 0$ ✔, $f(6) = 36 - 36 + 5 = 5 > 0$ ✔.

Équation $f(x) = 5$: on écrit $x^2 - 6x + 5 = 5$, soit $x^2 - 6x = 0$.

On factorise par x : $x(x-6) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 6$.

Vérification : $f(0) = 5$ ✔ et $f(6) = 36 - 36 + 5 = 5$ ✔.

Interprétation graphique : la droite horizontale d'équation $y = 5$ coupe la parabole en deux points, $(0\,;5)$ et $(6\,;5)$.

Contrôle de cohérence final : ces deux abscisses sont symétriques par rapport à $x = 3$, l'axe de la parabole — puisque $\dfrac{0+6}{2} = 3$. ✔ Tous les résultats de l'exercice se confirment mutuellement.

Réponse. Racines 1 et 5, donc $f(x) = (x-1)(x-5)$ · forme canonique $(x-3)^2 - 4$, sommet $S(3\,;-4)$ · décroissante puis croissante avec minimum -4 en 3 ; positive hors de $[1\,;5]$, négative entre · $f(x) = 5$ donne $x = 0$ ou $x = 6$, points $(0\,;5)$ et $(6\,;5)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Trois écritures, trois usages : développée → $f(0)$ · canonique → sommet et variations · factorisée → racines et signe. Toute étude complète les utilise toutes les trois.

Erreur fréquente. Résoudre $f(x) = 5$ en réutilisant les racines 1 et 5. Le « 5 » de l'équation est une ORDONNÉE, sans rapport avec la racine $x = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).