Probabilités conditionnelles — Première générale

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Conditionner, c'est réduire l'univers : $P_A(B)$ est la probabilité de B sachant qu'on sait déjà que A est réalisé. Tout le chapitre tient dans une seule formule, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, lue dans un sens sur un arbre pondéré et dans l'autre pour retrouver une probabilité inversée. Ces 20 exercices installent d'abord la lecture d'un tableau croisé et la construction d'un arbre, puis la formule des probabilités totales, l'indépendance — à ne jamais confondre avec l'incompatibilité — et les tirages avec ou sans remise. Les derniers exercices traitent le cas qui surprend tout le monde : un test médical fiable à 98 % dont un résultat positif ne signifie pourtant la maladie qu'une fois sur trois et demie.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-generale/probabilites-conditionnelles-introduction

Exercice 1 – Lire un tableau croisé

Dans un lycée de 200 élèves, on relève le sexe et le régime :

filles internes : 45 · filles externes : 75 garçons internes : 35 · garçons externes : 45

On choisit un élève au hasard. On note F « l'élève est une fille » et I « l'élève est interne ».

1. Vérifie les effectifs totaux, puis calcule $P(F)$ et $P(I)$.

2. Calcule $P(F \cap I)$.

3. Calcule $P(F \cup I)$.

Exercice 2 – Première probabilité conditionnelle

On reprend le tableau précédent (120 filles dont 45 internes ; 80 garçons dont 35 internes).

1. Calcule $P_F(I)$, la probabilité que l'élève soit interne sachant que c'est une fille.

2. Calcule $P_I(F)$, la probabilité que ce soit une fille sachant que l'élève est interne.

3. Ces deux probabilités sont-elles égales ? Explique.

Exercice 3 – Appliquer la formule de conditionnement

On donne $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calcule $P_A(B)$, $P_B(A)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 4 – Lire un arbre pondéré

Un sac contient des jetons de deux couleurs. On tire un jeton, puis on effectue un second tirage dont les probabilités dépendent du premier. Sur l'arbre, la première branche porte $P(A) = 0{,}3$; à partir de A, la branche vers B porte 0,8 ; à partir de $\overline{A}$, la branche vers B porte 0,5.

1. Que valent $P(\overline{A})$, $P_A(\overline{B})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Calcule la probabilité du chemin A puis B.

3. Que représente le nombre 0,8 porté par la deuxième branche ?

Exercice 5 – Probabilité d'une intersection

Dans une usine, 70 % des pièces passent par la machine M. Parmi celles qui passent par M, 4 % sont défectueuses. On prélève une pièce au hasard.

1. Traduis les deux données en langage probabiliste.

2. Calcule la probabilité que la pièce soit passée par M et soit défectueuse.

3. Sur 5 000 pièces, combien cela représente-t-il ?

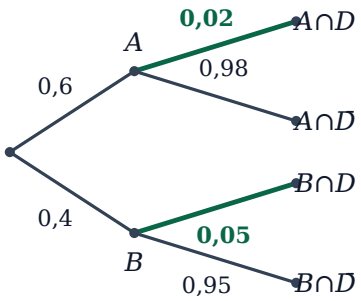
Exercice 6 – Formule des probabilités totales

Une entreprise fabrique des pièces sur deux machines. La machine A produit 60 % des pièces, dont 2 % sont défectueuses ; la machine B produit les 40 % restants, dont 5 % sont défectueuses. On prélève une pièce au hasard et on note D l'événement « la pièce est défectueuse ».

1. Calcule les probabilités des quatre chemins de l'arbre.

2. Calcule $P(D)$.

3. Le taux global de pièces défectueuses est-il la moyenne de 2 % et 5 % ?



Arbre pondéré : les deux chemins menant à D sont mis en évidence

Exercice 7 – Remonter l'arbre

On reprend la situation précédente ($P(A) = 0{,}6$, $P_A(D) = 0{,}02$, $P(B) = 0{,}4$, $P_B(D) = 0{,}05$, et $P(D) = 0{,}032$). Une pièce prélevée se révèle défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A ?

Exercice 8 – Tester l'indépendance

Dans chacun des cas suivants, dis si les événements A et B sont indépendants.

1. $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A \cap B) = 0{,}2$

2. $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A \cap B) = 0{,}25$

3. $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}6$; $P_A(B) = 0{,}6$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Compléter un tableau croisé

Sur 400 personnes interrogées, 160 sont des hommes et 220 pratiquent un sport. Parmi les hommes, 88 pratiquent un sport.

1. Complète le tableau croisé (les quatre cases et les totaux).

2. Calcule $P_H(S)$ et $P(S)$, où H est « être un homme » et S « pratiquer un sport ».

3. Les événements H et S sont-ils indépendants ?

Exercice 10 – Événement contraire dans un arbre

Un site vend deux formules. $P(F_1) = 0{,}35$, et F_2 est la formule complémentaire. Un client de F_1 renouvelle son abonnement avec une probabilité de 0,9 ; un client de F_2 le renouvelle avec une probabilité de 0,6. On note R « le client renouvelle ».

1. Calcule $P(R)$.

2. Calcule la probabilité qu'un client ne renouvelle pas.

3. Un client ne renouvelle pas : quelle est la probabilité qu'il ait souscrit F_2 ?

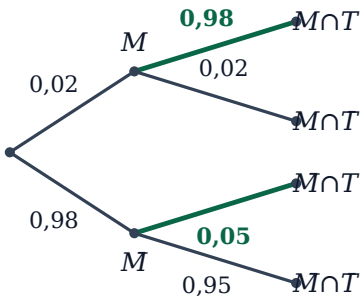
Exercice 11 – Le paradoxe du test médical

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test de dépistage donne un résultat positif pour 98 % des personnes malades, et pour 5 % des personnes saines. On note M « être malade » et T « le test est positif ».

1. Calcule $P(T)$.

2. Une personne a un test positif : quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?

3. Commente ce résultat.



Les deux chemins menant à un test positif : 0,0196 et 0,049

Exercice 12 – Arbre à trois branches

Un magasin s'approvisionne chez trois fournisseurs : F_1 fournit 50 % des articles, F_2 en fournit 30 % et F_3 le reste. Le taux d'articles défectueux est de 1 % chez F_1, 3 % chez F_2 et 4 % chez F_3.

1. Calcule la probabilité qu'un article prélevé au hasard soit défectueux.

2. Un article défectueux est trouvé : quelle est la probabilité qu'il vienne de F_3 ?

3. Classe les trois fournisseurs selon leur contribution aux défauts.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Tirages sans remise

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire deux boules successivement, SANS remettre la première.

1. Calcule la probabilité de tirer deux rouges.

2. Calcule la probabilité de tirer exactement une rouge.

3. Vérifie que la somme des probabilités des quatre chemins vaut 1.

Exercice 14 – Avec remise : l'indépendance

Même urne (5 rouges, 3 vertes), mais on REMET la première boule avant le second tirage.

1. Calcule la probabilité de tirer deux rouges.

2. Calcule la probabilité de tirer exactement une rouge.

3. Compare avec les résultats de l'exercice précédent et explique les écarts.

Exercice 15 – Retards et moyens de transport

Un salarié se rend au travail en bus dans 70 % des cas et à vélo sinon. Il arrive en retard dans 10 % des trajets en bus, et dans 4 % des trajets à vélo.

1. Construis l'arbre et calcule la probabilité qu'il soit en retard.

2. Un jour où il est en retard, quelle est la probabilité qu'il soit venu en bus ?

3. Sur une année de 220 jours travaillés, combien de retards peut-il prévoir ?

Exercice 16 – Indépendance et incompatibilité

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles : $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}5$.

1. On suppose A et B INCOMPATIBLES. Calcule $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ et $P_A(B)$.

2. Ces événements sont-ils indépendants ?

3. On suppose maintenant A et B INDÉPENDANTS. Calcule $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 17 – Retrouver une proportion inconnue

Un atelier possède deux machines. La machine A assure une proportion x de la production, avec 2 % de pièces défectueuses ; la machine B assure le reste, avec 6 % de défectueuses. Le taux global de pièces défectueuses est de 3 %.

1. Exprime $P(D)$ en fonction de x.

2. Détermine x.

3. Vérifie le résultat et calcule $P_D(A)$.

Exercice 18 – Répétition d'épreuves indépendantes

Un archer atteint la cible avec une probabilité de 0,8 à chaque tir, et les tirs sont indépendants. Il effectue 3 tirs.

1. Calcule la probabilité qu'il atteigne la cible aux trois tirs.

2. Calcule la probabilité qu'il rate au moins une fois.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Calcule la probabilité qu'il atteigne la cible exactement deux fois.

Exercice 19 – Sur-représentation dans un sous-groupe

Dans une entreprise, 40 % des salariés sont en télétravail au moins deux jours par semaine. Parmi les télétravailleurs, 25 % habitent à plus de 30 km ; parmi les autres, cette proportion n'est que de 10 %. On note T « être en télétravail » et L « habiter à plus de 30 km ».

1. Calcule $P(L)$.

2. Calcule $P_L(T)$ et compare à $P(T)$.

3. Les événements T et L sont-ils indépendants ? Interprète.

Exercice 20 – Synthèse : satisfaction des clients

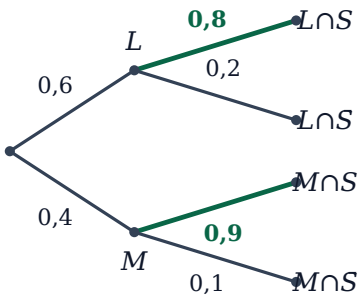
Un commerçant interroge 500 clients. 300 ont acheté en ligne, les autres en magasin. Parmi les acheteurs en ligne, 240 se déclarent satisfaits ; parmi ceux en magasin, 180 le sont. On note L « avoir acheté en ligne » et S « être satisfait ».

1. Calcule $P(L)$, $P(S)$ et $P(L \cap S)$.

2. Calcule $P_L(S)$ et $P_M(S)$, où $M = \overline{L}$. Quel canal satisfait le plus ?

3. Les événements L et S sont-ils indépendants ?

4. Un client satisfait est choisi au hasard : quelle est la probabilité qu'il ait acheté en ligne ?



Arbre de la situation : les deux chemins menant à un client satisfait

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Lire un tableau croisé

Effectif des filles : $45 + 75 = 120$. Effectif des garçons : $35 + 45 = 80$. Total : $120 + 80 = 200$ ✔, ce qui confirme les données.

Effectif des internes : $45 + 35 = 80$. Effectif des externes : $75 + 45 = 120$. Total : 200 ✔.

Comme le choix est au hasard, chaque élève a la même probabilité d'être choisi : on calcule des fréquences.

$P(F) = \dfrac{120}{200} = 0{,}6$.

$P(I) = \dfrac{80}{200} = 0{,}4$.

$P(F \cap I)$ est la probabilité que l'élève soit à la fois une fille ET interne : c'est la case « filles internes ».

$P(F \cap I) = \dfrac{45}{200} = 0{,}225$.

Pour l'union, on utilise $P(F \cup I) = P(F) + P(I) - P(F \cap I)$.

$P(F \cup I) = 0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}225 = 0{,}775$.

On retranche l'intersection parce que les 45 filles internes seraient sinon comptées deux fois — une fois dans les filles, une fois dans les internes.

Vérification par les effectifs : $F \cup I$ regroupe les 120 filles et les 35 garçons internes, soit 155 élèves. Or $\dfrac{155}{200} = 0{,}775$. ✔

Réponse. $P(F) = 0{,}6$; $P(I) = 0{,}4$; $P(F \cap I) = 0{,}225$; $P(F \cup I) = 0{,}775$.

Rappel de cours. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: on retranche l'intersection, comptée deux fois dans la somme.

Erreur fréquente. Additionner $0{,}6 + 0{,}4 = 1$ et conclure que l'élève est forcément fille ou interne. Les 45 garçons externes ne sont ni l'un ni l'autre.

Correction de l'exercice 2 – Première probabilité conditionnelle

Conditionner par F, c'est se restreindre aux filles : l'univers passe de 200 élèves à 120.

Parmi ces 120 filles, 45 sont internes, donc $P_F(I) = \dfrac{45}{120}$.

On simplifie par 15 : $\dfrac{45}{120} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$.

Conditionner par I, c'est se restreindre aux internes : l'univers devient les 80 internes.

Parmi ces 80 internes, 45 sont des filles, donc $P_I(F) = \dfrac{45}{80} = \dfrac{9}{16} = 0{,}5625$.

Les deux probabilités sont donc DIFFÉRENTES : 0,375 contre 0,5625.

Explication : le numérateur est le même (les 45 filles internes), mais le dénominateur change. On divise une fois par l'effectif des filles, une fois par celui des internes.

Les deux questions ne sont d'ailleurs pas les mêmes : « quelle proportion des filles est interne ? » et « quelle proportion des internes est une fille ? ».

Vérification par la formule générale $P_F(I) = \dfrac{P(F \cap I)}{P(F)} = \dfrac{0{,}225}{0{,}6} = 0{,}375$. ✔

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Et $P_I(F) = \dfrac{P(F \cap I)}{P(I)} = \dfrac{0{,}225}{0{,}4} = 0{,}5625$. ✔ Les deux méthodes concordent.

À retenir : $P_A(B)$ et $P_B(A)$ ne sont presque jamais égales. Les confondre est l'erreur la plus lourde du chapitre.

Réponse. $P_F(I) = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$ et $P_I(F) = \dfrac{9}{16} = 0{,}5625$: elles diffèrent, car on ne divise pas par le même effectif.

Rappel de cours. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$: le conditionnement REMPLACE l'univers par A. C'est le dénominateur qui change, pas le numérateur.

Erreur fréquente. Croire que $P_F(I) = P_I(F)$. Dans la vie courante on entend souvent l'un pour l'autre — mathématiquement, ce sont deux nombres distincts.

Correction de l'exercice 3 – Appliquer la formule de conditionnement

On applique directement la définition $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, valable dès que $P(A) \neq 0$.

$P_A(B) = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$.

De même, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$.

On retrouve le fait que ces deux probabilités diffèrent, même si l'intersection est commune.

Pour l'union : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}8$.

Contrôle de vraisemblance : une probabilité doit rester entre 0 et 1. Ici 0,25, 0,2 et 0,8 conviennent. ✔

Second contrôle : $P_A(B)$ doit toujours être supérieure ou égale à $P(A \cap B)$, puisqu'on divise par un nombre inférieur ou égal à 1. Ici $0{,}25 \geq 0{,}1$. ✔

Troisième contrôle : $P(A \cap B) \leq \min(P(A) ; P(B))$, car l'intersection est incluse dans chacun des deux. Ici $0{,}1 \leq 0{,}4$. ✔

Ces trois contrôles se font de tête et détectent la plupart des erreurs de calcul.

Réponse. $P_A(B) = 0{,}25$; $P_B(A) = 0{,}2$; $P(A \cup B) = 0{,}8$.

Rappel de cours. Trois contrôles automatiques : toute probabilité est dans $[0 ; 1]$ · $P_A(B) \geq P(A \cap B)$ · $P(A \cap B) \leq P(A)$ et $\leq P(B)$.

Erreur fréquente. Diviser par $P(B)$ pour calculer $P_A(B)$. L'indice indique par quoi on CONDITIONNE, donc ce qui va au dénominateur : ici $P(A)$.

Correction de l'exercice 4 – Lire un arbre pondéré

Règle de base d'un arbre pondéré : la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1.

Depuis le nœud de départ, deux branches seulement : A et $\overline{A}$. Donc $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Depuis le nœud A, deux branches : B et $\overline{B}$. Donc $P_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Depuis le nœud $\overline{A}$: $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Pour la probabilité d'un chemin, on MULTIPLIE les probabilités rencontrées le long de ce chemin.

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

Cette règle n'est que la formule de conditionnement écrite dans l'autre sens : de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, on tire $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Le nombre 0,8 est une probabilité CONDITIONNELLE : c'est $P_A(B)$, la probabilité de B sachant que A s'est réalisé.

Ce n'est PAS $P(B)$, ni $P(A \cap B)$. Sur un arbre, seules les branches du premier niveau portent des probabilités « simples ».

Contrôle : les quatre chemins doivent avoir des probabilités de somme 1. Ici $0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}2 + 0{,}7 \times 0{,}5 + 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}24 + 0{,}06 + 0{,}35 + 0{,}35 = 1$. ✔

Réponse. $P(\overline{A}) = 0{,}7$; $P_A(\overline{B}) = 0{,}2$; $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}5$ · le chemin A puis B a pour probabilité 0,24 · le nombre 0,8 est la probabilité conditionnelle $P_A(B)$.

Rappel de cours. Sur un arbre : on MULTIPLIE le long d'un chemin, et la somme des branches issues d'un même nœud vaut 1.

Erreur fréquente. Lire 0,8 comme $P(B)$. Les branches de deuxième niveau portent toujours des probabilités conditionnelles.

Correction de l'exercice 5 – Probabilité d'une intersection

On note M « la pièce passe par la machine M » et D « la pièce est défectueuse ».

La première donnée, 70 % des pièces, concerne l'ensemble de la production : $P(M) = 0{,}7$.

La seconde, « PARMI celles qui passent par M », restreint l'univers aux pièces de M : c'est une probabilité conditionnelle, $P_M(D) = 0{,}04$.

Repérer ce mot « parmi » (ou « sachant que », « sur les… ») est le point décisif de tout l'exercice.

On applique la règle du produit : $P(M \cap D) = P(M) \times P_M(D)$.

$P(M \cap D) = 0{,}7 \times 0{,}04 = 0{,}028$.

Autrement dit, 2,8 % de la production totale est constituée de pièces défectueuses issues de M.

Sur 5 000 pièces : $0{,}028 \times 5\,000 = 140$ pièces.

Vérification par les effectifs : 70 % de 5 000 font 3 500 pièces issues de M, dont 4 % sont défectueuses, soit $0{,}04 \times 3\,500 = 140$. ✔

Contrôle de vraisemblance : 2,8 % est nécessairement inférieur à 4 %, puisqu'on ne compte qu'une partie de la production. ✔

Réponse. $P(M) = 0{,}7$ et $P_M(D) = 0{,}04$ · $P(M \cap D) = 0{,}028$ · soit 140 pièces sur 5 000.

Rappel de cours. « x % PARMI les A » se traduit par $P_A(\ldots)$, jamais par une probabilité simple. Le mot « parmi » signale le conditionnement.

Erreur fréquente. Additionner ou multiplier sans distinguer les deux natures de pourcentage. Ici 4 % porte sur les 3 500 pièces de M, pas sur les 5 000.

Correction de l'exercice 6 – Formule des probabilités totales

Données : $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$, $P_A(D) = 0{,}02$ et $P_B(D) = 0{,}05$.

On en déduit $P_A(\overline{D}) = 0{,}98$ et $P_B(\overline{D}) = 0{,}95$.

Chemin A puis D : $P(A \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012$.

Chemin A puis $\overline{D}$: $0{,}6 \times 0{,}98 = 0{,}588$.

Chemin B puis D : $P(B \cap D) = 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}02$.

Chemin B puis $\overline{D}$: $0{,}4 \times 0{,}95 = 0{,}38$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : 0,012 + 0,588 + 0,02 + 0,38 = 1. ✔ L'arbre est complet et correctement pondéré.

Une pièce défectueuse vient soit de A, soit de B : ces deux cas sont incompatibles et couvrent toutes les possibilités.

Formule des probabilités totales : $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}012 + 0{,}02 = 0{,}032$.

Le taux global de défauts est donc de 3,2 %.

Ce n'est PAS la moyenne de 2 % et 5 %, qui vaudrait 3,5 %. Les deux machines ne produisent pas la même quantité de pièces.

Le résultat est une moyenne PONDÉRÉE : $0{,}6 \times 2 + 0{,}4 \times 5 = 1{,}2 + 2 = 3{,}2$. ✔ La machine la plus productive, qui est aussi la meilleure, tire le taux global vers le bas.

Réponse. Chemins : 0,012 ; 0,588 ; 0,02 ; 0,38 (somme 1) · $P(D) = 0{,}032$ · ce n'est pas la moyenne 3,5 % mais une moyenne pondérée par les productions.

Rappel de cours. Probabilités totales : $P(D) = P(A \cap D) + P(\overline{A} \cap D)$. On additionne les chemins qui mènent à D, après avoir multiplié le long de chacun.

Erreur fréquente. Faire la moyenne simple des deux taux. Elle ne serait correcte que si les deux machines produisaient exactement la même quantité.

Correction de l'exercice 7 – Remonter l'arbre

La question demande $P_D(A)$: la probabilité de venir de A, SACHANT que la pièce est défectueuse.

Attention, ce n'est pas $P_A(D) = 0{,}02$, qui est la donnée de l'énoncé. On demande l'inverse : on connaît le défaut et on remonte vers la machine.

On applique la définition : $P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)}$.

Le numérateur a été calculé précédemment : $P(A \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012$.

Le dénominateur vient de la formule des probabilités totales : $P(D) = 0{,}032$.

$P_D(A) = \dfrac{0{,}012}{0{,}032}$.

On simplifie : $\dfrac{0{,}012}{0{,}032} = \dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$.

Environ 37,5 % des pièces défectueuses proviennent donc de la machine A.

Vérification par les effectifs, sur 10 000 pièces : A en produit 6 000, dont 120 défectueuses ; B en produit 4 000, dont 200 défectueuses.

Total des défectueuses : 320, dont 120 viennent de A, soit $\dfrac{120}{320} = 0{,}375$. ✔

Résultat intéressant : A est la machine la plus FIABLE (2 % contre 5 %), et pourtant plus d'un tiers des pièces défectueuses viennent d'elle — parce qu'elle produit beaucoup plus.

Contrôle de cohérence : $P_D(A) + P_D(B) = 0{,}375 + \dfrac{0{,}02}{0{,}032} = 0{,}375 + 0{,}625 = 1$. ✔ Une pièce défectueuse vient forcément de l'une des deux machines.

Réponse. $P_D(A) = \dfrac{0{,}012}{0{,}032} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$, soit 37,5 % des pièces défectueuses.

Rappel de cours. Pour « remonter » un arbre : $P_D(A) = \dfrac{\text{chemin } A \to D}{\text{tous les chemins} \to D}$. Le dénominateur est $P(D)$.

Erreur fréquente. Répondre 0,02. C'est $P_A(D)$, la donnée de départ — l'exercice demande précisément l'autre sens.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Tester l'indépendance

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de l'autre.

Le test de référence est : A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Premier cas : $P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$, et l'énoncé donne $P(A \cap B) = 0{,}2$.

Il y a égalité, donc A et B sont INDÉPENDANTS.

On peut le confirmer autrement : $P_A(B) = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4 = P(B)$. Savoir que A est réalisé ne change rien à la probabilité de B. ✔

Deuxième cas : $P(A) \times P(B) = 0{,}2$, mais $P(A \cap B) = 0{,}25$.

Les deux valeurs diffèrent, donc A et B ne sont PAS indépendants.

Ici $P_A(B) = \dfrac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5 > 0{,}4$: la réalisation de A augmente la probabilité de B.

Troisième cas : on donne directement $P_A(B) = 0{,}6$, et $P(B) = 0{,}6$.

Comme $P_A(B) = P(B)$, les deux événements sont indépendants — c'est la caractérisation la plus parlante.

Vérification par le produit : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$, et $P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$. ✔

À retenir : l'indépendance est une PROPRIÉTÉ NUMÉRIQUE à vérifier, jamais une impression. Deux événements peuvent sembler sans rapport et ne pas être indépendants, et inversement.

Réponse. a) indépendants ($0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$) · b) non indépendants ($0{,}25 \neq 0{,}2$) · c) indépendants ($P_A(B) = P(B) = 0{,}6$).

Rappel de cours. A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$. Les deux critères sont équivalents.

Erreur fréquente. Décider de l'indépendance « au feeling », parce que les événements paraissent sans lien. Seul le calcul tranche.

Correction de l'exercice 9 – Compléter un tableau croisé

On place d'abord les données : 400 personnes en tout, 160 hommes, donc $400 - 160 = 240$ femmes.

220 sportifs, donc $400 - 220 = 180$ non-sportifs.

Hommes sportifs : 88, donc hommes non-sportifs : $160 - 88 = 72$.

Femmes sportives : $220 - 88 = 132$, et femmes non-sportives : $240 - 132 = 108$.

Vérification globale : $88 + 72 + 132 + 108 = 400$. ✔ Le tableau est cohérent.

$P_H(S)$ se lit sur la ligne des hommes : $\dfrac{88}{160} = \dfrac{11}{20} = 0{,}55$.

$P(S)$ se lit sur le total : $\dfrac{220}{400} = \dfrac{11}{20} = 0{,}55$.

Les deux valeurs sont ÉGALES : savoir que la personne est un homme ne change pas la probabilité qu'elle soit sportive.

Les événements H et S sont donc indépendants.

Vérification par le produit : $P(H) = \dfrac{160}{400} = 0{,}4$ et $P(H) \times P(S) = 0{,}4 \times 0{,}55 = 0{,}22$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Or $P(H \cap S) = \frac{88}{400} = 0{,}22$. ✔ Les deux critères concordent.

Contrôle du côté des femmes : $P_F(S) = \frac{132}{240} = 0{,}55$ également. ✔ C'est cohérent : si l'indépendance vaut pour H, elle vaut aussi pour son complémentaire.

Réponse. Hommes : 88 sportifs et 72 non ; femmes : 132 et 108 · $P_H(S) = P(S) = 0{,}55$ · les événements sont indépendants.

Rappel de cours. Dans un tableau croisé, l'indépendance se voit d'un coup d'œil : la proportion de sportifs est la même dans chaque ligne que dans le total.

Erreur fréquente. Remplir le tableau sans vérifier la somme finale. Une seule case fausse propage l'erreur à toutes les probabilités demandées.

Correction de l'exercice 10 – Événement contraire dans un arbre

Données : $P(F_1) = 0{,}35$, donc $P(F_2) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$. Puis $P_{F_1}(R) = 0{,}9$ et $P_{F_2}(R) = 0{,}6$.

Chemins menant à R : $P(F_1 \cap R) = 0{,}35 \times 0{,}9 = 0{,}315$ et $P(F_2 \cap R) = 0{,}65 \times 0{,}6 = 0{,}39$.

Formule des probabilités totales : $P(R) = 0{,}315 + 0{,}39 = 0{,}705$.

Environ 70,5 % des clients renouvellent leur abonnement.

Pour le non-renouvellement, le plus rapide est de passer par l'événement contraire : $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0{,}705 = 0{,}295$.

Vérification par les chemins : $P(F_1 \cap \overline{R}) = 0{,}35 \times 0{,}1 = 0{,}035$ et $P(F_2 \cap \overline{R}) = 0{,}65 \times 0{,}4 = 0{,}26$.

Somme : $0{,}035 + 0{,}26 = 0{,}295$. ✔ Les deux méthodes concordent, mais la première est bien plus rapide.

Pour la dernière question, on cherche $P_{\overline{R}}(F_2) = \frac{P(F_2 \cap \overline{R})}{P(\overline{R})}$.

$P_{\overline{R}}(F_2) = \frac{0{,}26}{0{,}295} \approx 0{,}8814$.

Environ 88 % des clients qui ne renouvellent pas avaient souscrit la formule F_2.

Interprétation : F_2 est à la fois la formule majoritaire et celle qui fidélise le moins, ce qui explique qu'elle domine très largement parmi les départs.

Contrôle : $P_{\overline{R}}(F_1) = \frac{0{,}035}{0{,}295} \approx 0{,}1186$, et $0{,}8814 + 0{,}1186 = 1$. ✔

Réponse. $P(R) = 0{,}705$ · $P(\overline{R}) = 0{,}295$ · $P_{\overline{R}}(F_2) = \frac{0{,}26}{0{,}295} \approx 0{,}88$.

Rappel de cours. Pour un événement contraire, $P(\overline{R}) = 1 - P(R)$ évite de recalculer tous les chemins — mais recalculer reste une bonne vérification.

Erreur fréquente. Utiliser $P(F_2) = 0{,}65$ comme réponse à la dernière question. On demande une probabilité CONDITIONNELLE, sachant le non-renouvellement.

Correction de l'exercice 11 – Le paradoxe du test médical

Données : $P(M) = 0{,}02$, donc $P(\overline{M}) = 0{,}98$; puis $P_M(T) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}05$.

Chemin « malade et test positif » : $P(M \cap T) = 0{,}02 \times 0{,}98 = 0{,}0196$.

Chemin « sain et test positif » : $P(\overline{M} \cap T) = 0{,}98 \times 0{,}05 = 0{,}049$.

Probabilités totales : $P(T) = 0{,}0196 + 0{,}049 = 0{,}0686$, soit environ 6,9 % de tests positifs.

Premier constat frappant : les faux positifs (0,049) sont DEUX FOIS ET DEMIE plus nombreux que les vrais positifs (0,0196).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pour la deuxième question, on cherche $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)}$.

$P_T(M) = \dfrac{0{,}0196}{0{,}0686} = \dfrac{196}{686} = \dfrac{2}{7} \approx 0{,}2857$.

Une personne dont le test est positif n'a donc qu'environ 28,6 % de risque d'être réellement malade, soit un peu plus d'une chance sur quatre.

Vérification par les effectifs, sur 10 000 personnes : 200 malades, dont 196 testées positives ; 9 800 saines, dont 490 testées positives.

Total des tests positifs : 196 + 490 = 686, dont 196 vrais malades, soit $\dfrac{196}{686} = \dfrac{2}{7}$. ✔

Commentaire : le test est pourtant très performant (il détecte 98 % des malades). Le problème vient de la RARETÉ de la maladie.

Comme les personnes saines sont 49 fois plus nombreuses, même un faible taux d'erreur (5 %) sur ce groupe produit énormément de faux positifs.

C'est pourquoi, en médecine, un test positif à un dépistage de masse est toujours suivi d'un second examen, plus spécifique.

Contrôle du côté rassurant : $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \dfrac{0{,}98 \times 0{,}95}{1 - 0{,}0686} = \dfrac{0{,}931}{0{,}9314} \approx 0{,}9996$. Un test négatif est donc, lui, extrêmement fiable. ✔

Réponse. $P(T) = 0{,}0686 \cdot P_T(M) = \dfrac{2}{7} \approx 28{,}6\,\%$ · malgré un test performant, la rareté de la maladie fait que la majorité des tests positifs sont des faux positifs.

Rappel de cours. $P_M(T)$ (fiabilité du test) et $P_T(M)$ (probabilité d'être malade après un test positif) sont deux nombres très différents — ici 0,98 contre 0,29.

Erreur fréquente. Répondre 98 %. C'est la donnée $P_M(T)$, lue dans le mauvais sens : c'est exactement l'erreur que l'exercice met en évidence.

Correction de l'exercice 12 – Arbre à trois branches

Le premier niveau de l'arbre comporte ici TROIS branches, mais la méthode ne change pas : leur somme doit valoir 1.

$P(F_3) = 1 - 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$.

Chemin F_1 : $P(F_1 \cap D) = 0{,}5 \times 0{,}01 = 0{,}005$.

Chemin F_2 : $P(F_2 \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}03 = 0{,}009$.

Chemin F_3 : $P(F_3 \cap D) = 0{,}2 \times 0{,}04 = 0{,}008$.

Probabilités totales : $P(D) = 0{,}005 + 0{,}009 + 0{,}008 = 0{,}022$, soit 2,2 % d'articles défectueux.

Contrôle de vraisemblance : le résultat doit se situer entre le plus petit taux (1 %) et le plus grand (4 %). ✔

Pour la deuxième question : $P_D(F_3) = \dfrac{P(F_3 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}008}{0{,}022}$.

$\dfrac{0{,}008}{0{,}022} = \dfrac{8}{22} = \dfrac{4}{11} \approx 0{,}3636$, soit environ 36,4 %.

De même, $P_D(F_1) = \dfrac{5}{22} \approx 0{,}227$ et $P_D(F_2) = \dfrac{9}{22} \approx 0{,}409$.

Contrôle : $\dfrac{5}{22} + \dfrac{9}{22} + \dfrac{8}{22} = \dfrac{22}{22} = 1$. ✔ Un article défectueux vient nécessairement de l'un des trois.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Classement des contributions : F_2 (40,9 %), puis F_3 (36,4 %), puis F_1 (22,7 %).

Résultat contre-intuitif : F_3 est le PIRE fournisseur en taux de défauts (4 %), mais ce n'est pas lui qui contribue le plus aux défauts constatés, parce qu'il livre peu.

Conséquence pratique : pour réduire les défauts, il vaut mieux agir sur F_2, qui combine un volume important et un taux élevé.

Réponse. $P(D) = 0{,}022 \cdot P_D(F_3) = \frac{4}{11} \approx 36{,}4\,\%$ · contributions : F_2 40,9 %, F_3 36,4 %, F_1 22,7 %.

Rappel de cours. Avec n branches au premier niveau, la formule des probabilités totales additionne simplement les n chemins menant à l'événement.

Erreur fréquente. Classer les fournisseurs par leur taux de défauts. La contribution aux défauts dépend du produit « volume × taux », pas du taux seul.

Correction de l'exercice 13 – Tirages sans remise

Au premier tirage, l'urne contient 8 boules dont 5 rouges : $P(R_1) = \frac{5}{8}$.

Sans remise, l'urne ne contient plus que 7 boules au second tirage, et sa composition dépend du premier résultat. C'est exactement une situation de conditionnement.

Si la première est rouge, il reste 4 rouges sur 7 boules : $P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7}$.

Donc $P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$.

Pour « exactement une rouge », deux chemins conviennent : rouge puis verte, ou verte puis rouge.

Rouge puis verte : $\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$, car après une rouge il reste 3 vertes sur 7.

Verte puis rouge : $\frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$, car après une verte il reste 5 rouges sur 7.

Les deux chemins ont la même probabilité — ce n'est pas un hasard : le numérateur est le produit 5 × 3 dans les deux cas.

Total : $\frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$.

Quatrième chemin : deux vertes, $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$.

Somme des quatre chemins : $\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1$. ✔

Ce contrôle est indispensable : si la somme ne vaut pas 1, c'est qu'un chemin a été oublié ou qu'une probabilité conditionnelle est fausse.

Erreur classique à éviter : garder $\frac{5}{8}$ au second tirage. Sans remise, le dénominateur passe obligatoirement à 7.

Réponse. $P(\text{2 rouges}) = \frac{5}{14} \approx 0{,}357$ · $P(\text{exactement 1 rouge}) = \frac{15}{28} \approx 0{,}536$ · la somme des quatre chemins vaut bien 1.

Rappel de cours. Sans remise, le second tirage se fait dans une urne modifiée : effectif total ET composition changent selon le premier résultat.

Erreur fréquente. N'envisager qu'un seul chemin pour « exactement une rouge ». L'ordre n'étant pas imposé, il faut additionner les deux chemins.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Avec remise : l'indépendance

Avec remise, l'urne retrouve sa composition initiale : le second tirage se fait dans les mêmes conditions que le premier.

Les deux tirages sont donc INDÉPENDANTS : $P_{R_1}(R_2) = P(R_2) = \frac{5}{8}$.

Deux rouges : $P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64} \approx 0{,}391$.

Exactement une rouge : rouge puis verte donne $\frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$, et verte puis rouge la même valeur.

Total : $\frac{30}{64} = \frac{15}{32} \approx 0{,}469$.

Contrôle : deux vertes donnent $\frac{9}{64}$, et $\frac{25 + 15 + 15 + 9}{64} = \frac{64}{64} = 1$. ✔

Comparaison pour « deux rouges » : 0,391 avec remise contre 0,357 sans remise. La probabilité est plus GRANDE avec remise.

Explication : sans remise, retirer une rouge appauvrit l'urne en rouges ($\frac{4}{7} \approx 0{,}571$ au lieu de $\frac{5}{8} = 0{,}625$), ce qui pénalise le second tirage rouge.

Comparaison pour « exactement une rouge » : 0,469 avec remise contre 0,536 sans remise. Cette fois c'est le tirage sans remise qui l'emporte.

Explication symétrique : sans remise, tirer une boule d'une couleur rend l'autre couleur plus probable ensuite. Le tirage sans remise favorise donc les résultats MIXTES.

Idée générale à retenir : sans remise, les tirages se « repoussent » — la diversité est plus probable. Avec remise, chaque tirage repart de zéro.

Contrôle de cohérence global : les deux séries de quatre probabilités somment à 1, et les écarts se compensent bien (les gains sur « deux rouges » et « deux vertes » compensent la perte sur « une de chaque »). ✔

Réponse. Avec remise : $P(\text{2 rouges}) = \frac{25}{64} \approx 0{,}391$ et $P(\text{exactement 1 rouge}) = \frac{15}{32} \approx 0{,}469$ · sans remise, les tirages mixtes sont plus probables et les tirages identiques moins probables.

Rappel de cours. Avec remise → tirages indépendants, on multiplie les mêmes probabilités. Sans remise → tirages dépendants, il faut conditionner.

Erreur fréquente. Traiter les deux situations de la même façon. La présence ou l'absence de remise change tous les dénominateurs du second niveau.

Correction de l'exercice 15 – Retards et moyens de transport

On note B « venir en bus », V « venir à vélo » et R « être en retard ».

Données : $P(B) = 0{,}7$, $P(V) = 0{,}3$, $P_B(R) = 0{,}1$ et $P_V(R) = 0{,}04$.

Chemin bus et retard : $P(B \cap R) = 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}07$.

Chemin vélo et retard : $P(V \cap R) = 0{,}3 \times 0{,}04 = 0{,}012$.

Probabilités totales : $P(R) = 0{,}07 + 0{,}012 = 0{,}082$, soit 8,2 % des trajets.

Contrôle de vraisemblance : le taux global doit se situer entre 4 % et 10 %, plus près de 10 % car le bus domine. ✔

Pour la deuxième question : $P_R(B) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}07}{0{,}082}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\frac{0{,}07}{0{,}082} = \frac{70}{82} = \frac{35}{41} \approx 0{,}8537$.

Environ 85,4 % des retards se produisent donc lors d'un trajet en bus.

Ce pourcentage est nettement supérieur à $P(B) = 70\,\%$: le bus est sur-représenté parmi les retards, ce qui est logique puisqu'il est aussi le moyen le moins ponctuel.

Pour la troisième question : $0{,}082 \times 220 = 18{,}04$, soit environ 18 retards dans l'année.

Vérification par les deux modes : $0{,}7 \times 220 = 154$ trajets en bus, dont 10 % en retard, soit 15,4 ; et $0{,}3 \times 220 = 66$ trajets à vélo, dont 4 %, soit 2,64.

Total : $15{,}4 + 2{,}64 = 18{,}04$. ✔ Les deux méthodes concordent.

Remarque de rédaction : on arrondit seulement à la fin, et on interprète (« environ 18 retards »), un nombre de jours ne pouvant être décimal.

Réponse. $P(R) = 0{,}082 \cdot P_R(B) = \frac{35}{41} \approx 85{,}4\,\%$ · environ 18 retards sur 220 jours.

Rappel de cours. Comparer $P_R(B)$ à $P(B)$ indique si l'événement B est sur- ou sous-représenté parmi les cas étudiés.

Erreur fréquente. Confondre « 85 % des retards ont lieu en bus » et « 85 % des trajets en bus sont en retard ». La seconde affirmation est fausse : ce taux vaut 10 %.

Correction de l'exercice 16 – Indépendance et incompatibilité

Deux événements sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se produire en même temps : leur intersection est vide.

Donc $P(A \cap B) = 0$.

Union : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0 = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8$. Pour des événements incompatibles, les probabilités s'additionnent simplement.

Conditionnelle : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{0{,}3} = 0$.

Interprétation : si A est réalisé, B devient impossible. Savoir que A s'est produit change donc RADICALEMENT la probabilité de B, qui passe de 0,5 à 0.

Pour la deuxième question, on teste l'indépendance : $P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$, alors que $P(A \cap B) = 0$.

Ces deux valeurs diffèrent, donc A et B ne sont PAS indépendants.

Conclusion importante : deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont JAMAIS indépendants. Ce sont même deux notions opposées.

Incompatibles signifie « l'un exclut l'autre » — c'est une dépendance maximale. Indépendants signifie « l'un ne renseigne pas sur l'autre ».

Troisième question, avec l'hypothèse d'indépendance :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$.

Union : $P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}65$.

Vérification que la conditionnelle est cohérente : $P_A(B) = \frac{0{,}15}{0{,}3} = 0{,}5 = P(B)$. ✔ C'est bien la définition de l'indépendance.

Comparaison des deux scénarios : avec les mêmes $P(A)$ et $P(B)$, l'union vaut 0,8 dans un cas et 0,65 dans l'autre. Les hypothèses changent tout, il faut donc les lire attentivement.

Réponse. Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$, $P(A \cup B) = 0{,}8$, $P_A(B) = 0$, et ils ne sont PAS indépendants · indépendants : $P(A \cap B) = 0{,}15$ et $P(A \cup B) = 0{,}65$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Incompatibles ≠ indépendants. Incompatibles : $P(A \cap B) = 0$ (dépendance maximale) · indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Erreur fréquente. Employer « indépendants » pour dire « sans rapport, donc disjoints ». Ce sont deux propriétés distinctes, et même contradictoires ici.

Correction de l'exercice 17 – Retrouver une proportion inconnue

On note A et B les machines et D « la pièce est défectueuse ». On a $P(A) = x$ et $P(B) = 1 - x$.

Les taux de défauts sont conditionnels : $P_A(D) = 0{,}02$ et $P_B(D) = 0{,}06$.

Formule des probabilités totales : $P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$.

Donc $P(D) = 0{,}02x + 0{,}06(1 - x)$.

On développe : $P(D) = 0{,}02x + 0{,}06 - 0{,}06x = 0{,}06 - 0{,}04x$.

On remarque que cette expression est AFFINE et décroissante en x : plus la bonne machine produit, plus le taux global baisse. C'est un contrôle de cohérence du modèle. ✔

On résout $0{,}06 - 0{,}04x = 0{,}03$.

$-0{,}04x = 0{,}03 - 0{,}06 = -0{,}03$, donc $x = \dfrac{0{,}03}{0{,}04} = 0{,}75$.

La machine A assure donc 75 % de la production, et B les 25 % restants.

Vérification : $0{,}75 \times 0{,}02 + 0{,}25 \times 0{,}06 = 0{,}015 + 0{,}015 = 0{,}03$. ✔ On retrouve exactement le taux global annoncé.

Contrôle de vraisemblance : $x = 0{,}75$ est bien compris entre 0 et 1, condition indispensable pour une proportion. ✔

On peut aussi le retrouver sans équation : le taux global 3 % se situe à 1 point au-dessus de 2 % et à 3 points en dessous de 6 %, donc dans le rapport 3 pour 1 en faveur de la machine A, soit $\dfrac{3}{4} = 75\,\%$. ✔

Enfin, $P(A \cap D) = 0{,}75 \times 0{,}02 = 0{,}015$, donc $P_D(A) = \dfrac{0{,}015}{0{,}03} = 0{,}5$.

Exactement la moitié des pièces défectueuses vient de la machine A — ce qui est cohérent avec le calcul de vérification, où les deux contributions valaient 0,015 chacune. ✔

Réponse. $P(D) = 0{,}06 - 0{,}04x$ · $x = 0{,}75$, soit 75 % de la production pour A · vérification $0{,}015 + 0{,}015 = 0{,}03$ et $P_D(A) = 0{,}5$.

Rappel de cours. Une inconnue dans un arbre se traite comme dans n'importe quelle équation : on écrit la formule des probabilités totales, puis on résout.

Erreur fréquente. Écrire $P(B) = x$ alors qu'on a posé $P(A) = x$. Les deux branches doivent sommer à 1 : la seconde vaut $1 - x$.

Correction de l'exercice 18 – Répétition d'épreuves indépendantes

Les tirs étant indépendants, la probabilité d'un chemin de l'arbre est le produit des probabilités des branches, sans conditionnement.

Trois réussites : $P = 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}8^3$.

$0{,}8^2 = 0{,}64$, puis $0{,}64 \times 0{,}8 = 0{,}512$.

Pour « au moins une fois raté », on passe par l'événement CONTRAIRE, qui est « aucun raté », c'est-à-dire les trois réussites.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

P(au moins un raté) $= 1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

Cette technique est essentielle : dénombrer directement les chemins avec « au moins un raté » demanderait d'en examiner sept, alors que le complémentaire n'en demande qu'un.

Pour « exactement deux réussites », il faut identifier les chemins correspondants : RRE, RER, ERR, en notant R une réussite et E un échec.

Il y a donc TROIS chemins, correspondant aux trois positions possibles de l'échec.

Chacun a la même probabilité : $0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}128$, l'ordre des facteurs ne changeant pas le produit.

Total : $3 \times 0{,}128 = 0{,}384$.

Contrôle par la somme de tous les cas : 3 réussites 0,512 ; 2 réussites 0,384 ; 1 réussite $3 \times 0{,}8 \times 0{,}04 = 0{,}096$; 0 réussite $0{,}2^3 = 0{,}008$.

Somme : $0{,}512 + 0{,}384 + 0{,}096 + 0{,}008 = 1$. ✔ Aucun cas n'a été oublié.

Erreur fréquente : oublier le facteur 3 et répondre 0,128. C'est la probabilité d'UN chemin précis (par exemple rater le dernier tir), pas celle de l'événement complet.

Réponse. $0{,}8^3 = 0{,}512 \cdot 1 - 0{,}512 = 0{,}488 \cdot$ exactement deux réussites : $3 \times 0{,}128 = 0{,}384$.

Rappel de cours. « Au moins un » appelle presque toujours le passage au complémentaire. Et « exactement k » exige de compter les CHEMINS avant de multiplier.

Erreur fréquente. Oublier le nombre de chemins pour « exactement deux ». Un seul chemin donne 0,128, il y en a trois.

Correction de l'exercice 19 – Sur-représentation dans un sous-groupe

Données : $P(T) = 0{,}4$, $P(\overline{T}) = 0{,}6$, $P_T(L) = 0{,}25$ et $P_{\overline{T}}(L) = 0{,}1$.

Chemin télétravail et éloigné : $P(T \cap L) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$.

Chemin non-télétravail et éloigné : $P(\overline{T} \cap L) = 0{,}6 \times 0{,}1 = 0{,}06$.

Probabilités totales : $P(L) = 0{,}1 + 0{,}06 = 0{,}16$, soit 16 % des salariés.

Pour la deuxième question : $P_L(T) = \dfrac{P(T \cap L)}{P(L)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}16} = 0{,}625$.

Parmi les salariés éloignés, 62,5 % sont en télétravail, contre 40 % dans l'ensemble de l'entreprise.

Le télétravail est donc nettement SUR-REPRÉSENTÉ chez les salariés éloignés : le rapport est de $\dfrac{0{,}625}{0{,}4} \approx 1{,}56$, soit une fois et demie plus fréquent.

Pour l'indépendance : $P(T) \times P(L) = 0{,}4 \times 0{,}16 = 0{,}064$, alors que $P(T \cap L) = 0{,}1$.

Les deux valeurs diffèrent nettement, donc T et L ne sont PAS indépendants.

On pouvait le voir immédiatement : $P_L(T) = 0{,}625 \neq 0{,}4 = P(T)$. Savoir qu'un salarié habite loin modifie la probabilité qu'il télétravaille.

Interprétation : la distance et le télétravail sont liés, ce qui est attendu — plus on habite loin, plus le télétravail est demandé ou accordé.

Attention toutefois : cette liaison statistique ne dit pas dans quel sens s'exerce la causalité. Habiter loin peut inciter à demander le télétravail, mais le télétravail peut aussi permettre de déménager plus loin.

Contrôle : $P_L(\overline{T}) = \dfrac{0{,}06}{0{,}16} = 0{,}375$, et $0{,}625 + 0{,}375 = 1$. ✔

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $P(L) = 0{,}16$ · $P_L(T) = 0{,}625$ contre $P(T) = 0{,}4$: le télétravail est sur-représenté chez les salariés éloignés · les événements ne sont pas indépendants ($0{,}1 \neq 0{,}064$).

Rappel de cours. Comparer $P_B(A)$ à $P(A)$ mesure la sur- ou sous-représentation de A dans le sous-groupe B — et teste du même coup l'indépendance.

Erreur fréquente. Conclure à une causalité (« habiter loin cause le télétravail »). Une liaison statistique ne dit rien du sens du mécanisme.

Correction de l'exercice 20 – Synthèse : satisfaction des clients

Effectifs : 300 en ligne et $500 - 300 = 200$ en magasin.

Satisfaits : 240 en ligne et 180 en magasin, soit 420 au total. Non satisfaits : $500 - 420 = 80$.

$P(L) = \dfrac{300}{500} = 0{,}6$.

$P(S) = \dfrac{420}{500} = 0{,}84$.

$P(L \cap S) = \dfrac{240}{500} = 0{,}48$.

$P_L(S) = \dfrac{240}{300} = 0{,}8$: 80 % des acheteurs en ligne sont satisfaits.

$P_M(S) = \dfrac{180}{200} = 0{,}9$: 90 % des acheteurs en magasin sont satisfaits.

C'est donc le MAGASIN qui satisfait le plus, alors même qu'il compte moins de clients satisfaits en valeur absolue (180 contre 240).

Cette distinction entre effectif et proportion est le cœur de l'exercice : $240 > 180$, mais $0{,}8 < 0{,}9$.

Test d'indépendance : $P(L) \times P(S) = 0{,}6 \times 0{,}84 = 0{,}504$, alors que $P(L \cap S) = 0{,}48$.

$0{,}48 \neq 0{,}504$, donc L et S ne sont PAS indépendants.

On le confirme par les conditionnelles : $P_L(S) = 0{,}8$ est différent de $P(S) = 0{,}84$. Acheter en ligne diminue légèrement la probabilité d'être satisfait.

Dernière question : $P_S(L) = \dfrac{P(L \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}48}{0{,}84}$.

$\dfrac{0{,}48}{0{,}84} = \dfrac{48}{84} = \dfrac{4}{7} \approx 0{,}5714$, soit environ 57,1 %.

Vérification par les effectifs : $\dfrac{240}{420} = \dfrac{4}{7}$. ✔

Lecture d'ensemble : 57,1 % des clients satisfaits ont acheté en ligne, alors que le canal en ligne représente 60 % des clients. Il est donc légèrement SOUS-représenté parmi les satisfaits — cohérent avec le taux de satisfaction plus faible. ✔

Conseil qu'on peut en tirer : le commerçant devrait travailler l'expérience en ligne, qui concentre le plus de clients et le taux de satisfaction le plus bas.

Réponse. $P(L) = 0{,}6$, $P(S) = 0{,}84$, $P(L \cap S) = 0{,}48$ · $P_L(S) = 0{,}8$ contre $P_M(S) = 0{,}9$: le magasin satisfait davantage · non indépendants ($0{,}48 \neq 0{,}504$) · $P_S(L) = \dfrac{4}{7} \approx 57{,}1\,\%$.

Rappel de cours. Un effectif plus grand ne signifie pas une proportion plus grande. Toute comparaison de « qui satisfait le plus » se fait sur les probabilités CONDITIONNELLES.

Erreur fréquente. Conclure que le canal en ligne satisfait davantage parce qu'il compte 240 satisfaits contre 180. Il a aussi une fois et demie plus de clients.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).