Probabilités conditionnelles — Première générale

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Conditionner, c'est réduire l'univers : $P_A(B)$ est la probabilité de B sachant qu'on sait déjà que A est réalisé. Tout le chapitre tient dans une seule formule, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, lue dans un sens sur un arbre pondéré et dans l'autre pour retrouver une probabilité inversée. Ces 20 exercices installent d'abord la lecture d'un tableau croisé et la construction d'un arbre, puis la formule des probabilités totales, l'indépendance — à ne jamais confondre avec l'incompatibilité — et les tirages avec ou sans remise. Les derniers exercices traitent le cas qui surprend tout le monde : un test médical fiable à 98 % dont un résultat positif ne signifie pourtant la maladie qu'une fois sur trois et demie.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-generale/probabilites-conditionnelles-introduction

Exercice 1 – Lire un tableau croisé

Dans un lycée de 200 élèves, on relève le sexe et le régime :

filles internes : 45 · filles externes : 75 garçons internes : 35 · garçons externes : 45

On choisit un élève au hasard. On note F « l'élève est une fille » et I « l'élève est interne ».

1. Vérifie les effectifs totaux, puis calcule $P(F)$ et $P(I)$.

2. Calcule $P(F \cap I)$.

3. Calcule $P(F \cup I)$.

Exercice 2 – Première probabilité conditionnelle

On reprend le tableau précédent (120 filles dont 45 internes ; 80 garçons dont 35 internes).

1. Calcule $P_F(I)$, la probabilité que l'élève soit interne sachant que c'est une fille.

2. Calcule $P_I(F)$, la probabilité que ce soit une fille sachant que l'élève est interne.

3. Ces deux probabilités sont-elles égales ? Explique.

Exercice 3 – Appliquer la formule de conditionnement

On donne $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calcule $P_A(B)$, $P_B(A)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 4 – Lire un arbre pondéré

Un sac contient des jetons de deux couleurs. On tire un jeton, puis on effectue un second tirage dont les probabilités dépendent du premier. Sur l'arbre, la première branche porte $P(A) = 0{,}3$; à partir de A, la branche vers B porte 0,8 ; à partir de $\overline{A}$, la branche vers B porte 0,5.

1. Que valent $P(\overline{A})$, $P_A(\overline{B})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Calcule la probabilité du chemin A puis B.

3. Que représente le nombre 0,8 porté par la deuxième branche ?

Exercice 5 – Probabilité d'une intersection

Dans une usine, 70 % des pièces passent par la machine M. Parmi celles qui passent par M, 4 % sont défectueuses. On prélève une pièce au hasard.

1. Traduis les deux données en langage probabiliste.

2. Calcule la probabilité que la pièce soit passée par M et soit défectueuse.

3. Sur 5 000 pièces, combien cela représente-t-il ?

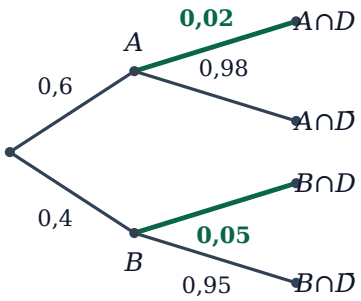
Exercice 6 – Formule des probabilités totales

Une entreprise fabrique des pièces sur deux machines. La machine A produit 60 % des pièces, dont 2 % sont défectueuses ; la machine B produit les 40 % restants, dont 5 % sont défectueuses. On prélève une pièce au hasard et on note D l'événement « la pièce est défectueuse ».

1. Calcule les probabilités des quatre chemins de l'arbre.

2. Calcule $P(D)$.

3. Le taux global de pièces défectueuses est-il la moyenne de 2 % et 5 % ?



Arbre pondéré : les deux chemins menant à D sont mis en évidence

Exercice 7 – Remonter l'arbre

On reprend la situation précédente ($P(A) = 0{,}6$, $P_A(D) = 0{,}02$, $P(B) = 0{,}4$, $P_B(D) = 0{,}05$, et $P(D) = 0{,}032$). Une pièce prélevée se révèle défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la machine A ?

Exercice 8 – Tester l'indépendance

Dans chacun des cas suivants, dis si les événements A et B sont indépendants.

1. $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A \cap B) = 0{,}2$

2. $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A \cap B) = 0{,}25$

3. $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}6$; $P_A(B) = 0{,}6$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Compléter un tableau croisé

Sur 400 personnes interrogées, 160 sont des hommes et 220 pratiquent un sport. Parmi les hommes, 88 pratiquent un sport.

1. Complète le tableau croisé (les quatre cases et les totaux).

2. Calcule $P_H(S)$ et $P(S)$, où H est « être un homme » et S « pratiquer un sport ».

3. Les événements H et S sont-ils indépendants ?

Exercice 10 – Événement contraire dans un arbre

Un site vend deux formules. $P(F_1) = 0{,}35$, et F_2 est la formule complémentaire. Un client de F_1 renouvelle son abonnement avec une probabilité de 0,9 ; un client de F_2 le renouvelle avec une probabilité de 0,6. On note R « le client renouvelle ».

1. Calcule $P(R)$.

2. Calcule la probabilité qu'un client ne renouvelle pas.

3. Un client ne renouvelle pas : quelle est la probabilité qu'il ait souscrit F_2 ?

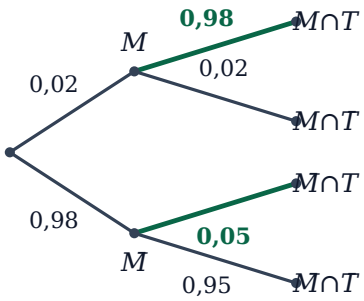
Exercice 11 – Le paradoxe du test médical

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test de dépistage donne un résultat positif pour 98 % des personnes malades, et pour 5 % des personnes saines. On note M « être malade » et T « le test est positif ».

1. Calcule $P(T)$.

2. Une personne a un test positif : quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?

3. Commente ce résultat.



Les deux chemins menant à un test positif : 0,0196 et 0,049

Exercice 12 – Arbre à trois branches

Un magasin s'approvisionne chez trois fournisseurs : F_1 fournit 50 % des articles, F_2 en fournit 30 % et F_3 le reste. Le taux d'articles défectueux est de 1 % chez F_1, 3 % chez F_2 et 4 % chez F_3.

1. Calcule la probabilité qu'un article prélevé au hasard soit défectueux.

2. Un article défectueux est trouvé : quelle est la probabilité qu'il vienne de F_3 ?

3. Classe les trois fournisseurs selon leur contribution aux défauts.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Tirages sans remise

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire deux boules successivement, SANS remettre la première.

1. Calcule la probabilité de tirer deux rouges.

2. Calcule la probabilité de tirer exactement une rouge.

3. Vérifie que la somme des probabilités des quatre chemins vaut 1.

Exercice 14 – Avec remise : l'indépendance

Même urne (5 rouges, 3 vertes), mais on REMET la première boule avant le second tirage.

1. Calcule la probabilité de tirer deux rouges.

2. Calcule la probabilité de tirer exactement une rouge.

3. Compare avec les résultats de l'exercice précédent et explique les écarts.

Exercice 15 – Retards et moyens de transport

Un salarié se rend au travail en bus dans 70 % des cas et à vélo sinon. Il arrive en retard dans 10 % des trajets en bus, et dans 4 % des trajets à vélo.

1. Construis l'arbre et calcule la probabilité qu'il soit en retard.

2. Un jour où il est en retard, quelle est la probabilité qu'il soit venu en bus ?

3. Sur une année de 220 jours travaillés, combien de retards peut-il prévoir ?

Exercice 16 – Indépendance et incompatibilité

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles : $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}5$.

1. On suppose A et B INCOMPATIBLES. Calcule $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ et $P_A(B)$.

2. Ces événements sont-ils indépendants ?

3. On suppose maintenant A et B INDÉPENDANTS. Calcule $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 17 – Retrouver une proportion inconnue

Un atelier possède deux machines. La machine A assure une proportion x de la production, avec 2 % de pièces défectueuses ; la machine B assure le reste, avec 6 % de défectueuses. Le taux global de pièces défectueuses est de 3 %.

1. Exprime $P(D)$ en fonction de x.

2. Détermine x.

3. Vérifie le résultat et calcule $P_D(A)$.

Exercice 18 – Répétition d'épreuves indépendantes

Un archer atteint la cible avec une probabilité de 0,8 à chaque tir, et les tirs sont indépendants. Il effectue 3 tirs.

1. Calcule la probabilité qu'il atteigne la cible aux trois tirs.

2. Calcule la probabilité qu'il rate au moins une fois.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Calcule la probabilité qu'il atteigne la cible exactement deux fois.

Exercice 19 – Sur-représentation dans un sous-groupe

Dans une entreprise, 40 % des salariés sont en télétravail au moins deux jours par semaine. Parmi les télétravailleurs, 25 % habitent à plus de 30 km ; parmi les autres, cette proportion n'est que de 10 %. On note T « être en télétravail » et L « habiter à plus de 30 km ».

1. Calcule $P(L)$.

2. Calcule $P_L(T)$ et compare à $P(T)$.

3. Les événements T et L sont-ils indépendants ? Interprète.

Exercice 20 – Synthèse : satisfaction des clients

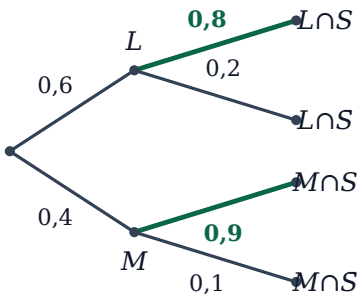
Un commerçant interroge 500 clients. 300 ont acheté en ligne, les autres en magasin. Parmi les acheteurs en ligne, 240 se déclarent satisfaits ; parmi ceux en magasin, 180 le sont. On note L « avoir acheté en ligne » et S « être satisfait ».

1. Calcule $P(L)$, $P(S)$ et $P(L \cap S)$.

2. Calcule $P_L(S)$ et $P_M(S)$, où $M = \overline{L}$. Quel canal satisfait le plus ?

3. Les événements L et S sont-ils indépendants ?

4. Un client satisfait est choisi au hasard : quelle est la probabilité qu'il ait acheté en ligne ?



Arbre de la situation : les deux chemins menant à un client satisfait

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).