Statistiques à deux variables — Première générale

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Deux variables mesurées sur les mêmes individus donnent un nuage de points, et la question est toujours la même : ce nuage est-il assez allongé pour qu'une droite le résume, et que vaut alors la prévision qu'on en tire ? Ces 20 exercices installent le point moyen, l'ajustement affine — par les points extrêmes, par la méthode de Mayer, puis par les moindres carrés à la calculatrice —, les résidus et le coefficient de corrélation. La seconde moitié est consacrée à ce qui fait la différence en devoir : savoir linéariser par changement de variable, repérer un point aberrant, et surtout critiquer une prévision. Un coefficient de corrélation proche de 1 ne rend pas un modèle vrai, et une extrapolation lointaine peut annoncer 137 % de foyers équipés.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-generale/statistiques-deux-variables

Exercice 1 – Point moyen d'un nuage

On a relevé, pour cinq magasins, le nombre x de vendeurs et le chiffre d'affaires y en milliers d'euros :

x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 y : 3 ; 5 ; 4 ; 8 ; 10

Calcule les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

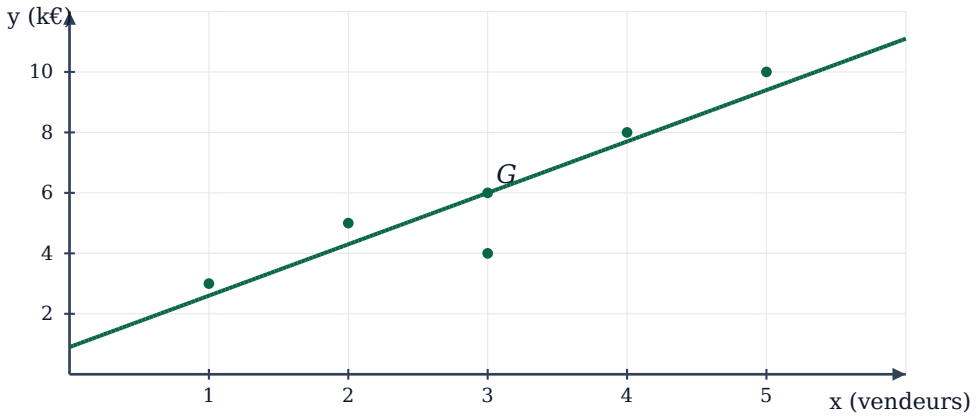
Exercice 2 – Décrire un nuage de points

Le nuage de la série précédente est représenté ci-dessous, avec sa droite d'ajustement.

1. La corrélation entre x et y est-elle positive ou négative ? Justifie.

2. Le nuage est-il bien aligné ? Quel point s'écarte le plus de la droite ?

3. Le point moyen $G(3\,;6)$ appartient-il à la droite ?



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Moyennes d'une seconde série

Une entreprise relève sa dépense de publicité x (en milliers d'euros) et ses ventes y (en milliers d'articles) :

x : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 y : 12 ; 15 ; 19 ; 22 ; 27

Calcule $\overline{x}$, $\overline{y}$ et les coordonnées du point moyen.

Exercice 4 – Utiliser une droite d'ajustement

Pour la série précédente, la calculatrice donne la droite d'ajustement $y = 1{,}85x + 11{,}6$.

1. Vérifie que cette droite passe par le point moyen $G(4\,;19)$.

2. Estime les ventes pour une dépense de 10 milliers d'euros.

3. Interprète le coefficient 1,85.

Exercice 5 – Interpolation ou extrapolation

Toujours avec la droite $y = 1{,}85x + 11{,}6$, obtenue à partir de dépenses comprises entre 0 et 8 milliers d'euros, on effectue trois estimations : pour $x = 5$, pour $x = 12$ et pour $x = 40$.

1. Calcule les trois valeurs estimées.

2. Pour chacune, dis s'il s'agit d'une interpolation ou d'une extrapolation.

3. Laquelle est la moins fiable, et pourquoi ?

Exercice 6 – Ajustement par les points extrêmes

On reprend la série des magasins : x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et y : 3 ; 5 ; 4 ; 8 ; 10.

1. Détermine l'équation de la droite passant par le premier et le dernier point du nuage.

2. Cette droite passe-t-elle par le point moyen $G(3\,;6)$?

3. Que penser de cette méthode ?

Exercice 7 – Droite des moindres carrés

Pour la même série (x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et y : 3 ; 5 ; 4 ; 8 ; 10), la calculatrice affiche l'ajustement affine $y = 1{,}7x + 0{,}9$.

1. Vérifie que cette droite passe par $G(3\,;6)$.

2. Compare-la à la droite des points extrêmes $y = 1{,}75x + 1{,}25$ pour $x = 2$ et $x = 5$.

3. Estime le chiffre d'affaires d'un magasin de 7 vendeurs.

Exercice 8 – Calculer des résidus

Avec l'ajustement $y = 1{,}7x + 0{,}9$, calcule pour chacun des cinq magasins la valeur estimée, puis le résidu (valeur réelle moins valeur estimée). Que vaut la somme des résidus ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Interpréter un coefficient de corrélation

Quatre études fournissent les coefficients de corrélation linéaire suivants. Pour chacun, indique le sens et la force de la liaison, et dis si un ajustement affine est pertinent.

1. $r = 0{,}996$ (dépense publicitaire et ventes)

2. $r = 0{,}92$ (nombre de vendeurs et chiffre d'affaires)

3. $r = -0{,}85$ (prix d'un produit et quantité vendue)

4. $r = 0{,}15$ (pointure et note en mathématiques)

Exercice 10 – Changer l'origine des années

Le chiffre d'affaires d'une société, en milliers d'euros, est relevé chaque année :

année : 2019 ; 2020 ; 2021 ; 2022 ; 2023 ; 2024 y : 242 ; 256 ; 279 ; 298 ; 313 ; 337

On pose x = année $-$ 2019.

1. Donne les valeurs de x et explique l'intérêt de ce changement.

2. Calcule $\overline{x}$ et $\overline{y}$.

3. La calculatrice donne $y = 19x + 240$. Vérifie qu'elle passe par le point moyen.

Exercice 11 – Méthode de Mayer

On considère la série :

x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 y : 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 11 ; 12

Détermine la droite d'ajustement par la méthode de Mayer : on partage le nuage en deux sous-nuages de même effectif, on calcule le point moyen de chacun, et la droite passe par ces deux points.

Exercice 12 – Comparer deux ajustements

Pour la série précédente, la calculatrice donne la droite des moindres carrés $y \approx 1{,}886x + 1{,}4$, alors que la méthode de Mayer donnait $y = 2x + 1$.

1. Compare les estimations des deux modèles pour $x = 3$ et $x = 6$.

2. Compare-les pour $x = 10$.

3. Que conclure ?

Exercice 13 – Prévision et seuil

On garde le modèle de Mayer $y = 2x + 1$, où x est le rang du mois et y le nombre de commandes (en centaines).

1. Estime le nombre de commandes au rang 8.

2. À partir de quel rang le modèle prévoit-il plus de 25 centaines de commandes ?

3. À quelle date cela correspond-il si le rang 1 désigne janvier 2026 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Linéariser par changement de variable

On relève la série suivante, dont le nuage est nettement courbé :

x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 y : 2 ; 1 ; 0,667 ; 0,5

On pose $z = \dfrac{1}{y}$.

1. Calcule les valeurs de z et montre qu'elles sont alignées avec x.

2. Détermine la relation entre z et x, puis entre y et x.

3. Estime y pour $x = 10$.

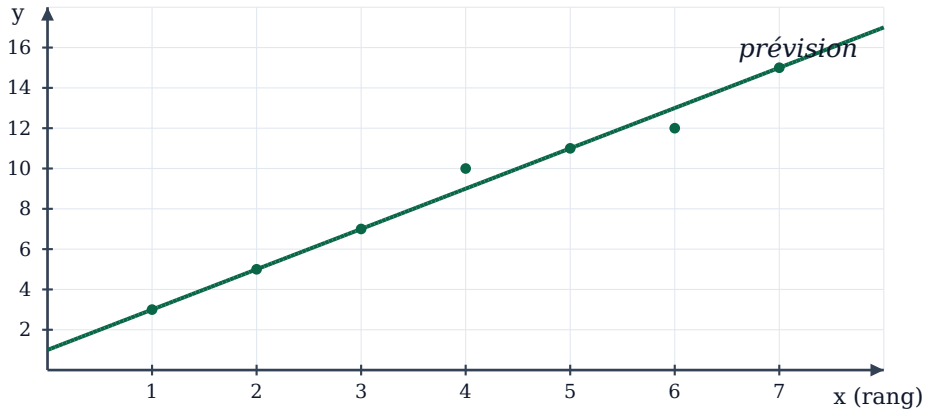
Exercice 15 – Lecture graphique d'un ajustement

Le nuage de la série (x : 1 à 6 ; y : 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 11 ; 12) est tracé ci-dessous avec la droite de Mayer.

1. Lis graphiquement l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur de la droite.

2. Estime graphiquement y pour $x = 7$, puis vérifie par le calcul.

3. Quels points du nuage sont au-dessus de la droite ?



Exercice 16 – Effet d'un point aberrant

Une série de six relevés donne : x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 et y : 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20. La calculatrice donne l'ajustement $y = 3x + 2$ avec $r = 1$.

À la saisie, la dernière valeur est tapée par erreur : 2 au lieu de 20. La calculatrice donne alors $y \approx 0{,}43x + 8$ avec $r \approx 0{,}14$.

1. Vérifie que la série initiale est parfaitement alignée.

2. Compare les deux ajustements et les deux coefficients de corrélation.

3. Que faire face à un point qui s'écarte fortement des autres ?

Exercice 17 – Corrélation forte, modèle inadapté

Le nombre d'abonnés d'un service, en milliers, évolue ainsi :

x (années) : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 y : 100 ; 140 ; 196 ; 274 ; 384

La calculatrice donne l'ajustement affine $y = 70{,}2x + 78{,}4$, avec $r \approx 0{,}98$.

1. Calcule les quotients de deux valeurs consécutives. Que constates-tu ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Propose un modèle mieux adapté et estime y pour $x = 6$ avec chacun des deux modèles.

3. Un coefficient $r = 0{,}98$ garantit-il que le modèle affine est le bon ?

Exercice 18 – Corrélation n’est pas causalité

Dans une ville, on relève chaque mois le nombre de glaces vendues et le nombre de noyades à la piscine municipale. Le coefficient de corrélation entre ces deux variables vaut 0,93.

1. Que peut-on affirmer sur la liaison entre ces deux variables ?

2. Peut-on en conclure que manger des glaces provoque des noyades ?

3. Propose une explication, et dis ce qu’il faudrait faire pour la tester.

Exercice 19 – Quand l’extrapolation devient absurde

Le pourcentage de foyers d’une commune équipés d’une connexion très haut débit est relevé de 2015 à 2020. Avec x = année $-$ 2015 :

x : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 y : 62 ; 67 ; 72 ; 77 ; 82 ; 87

La calculatrice donne $y = 5x + 62$ avec $r = 1$.

1. Vérifie l’équation de la droite et justifie que $r = 1$.

2. Que prévoit le modèle pour 2030 ? Commente.

3. À partir de quelle année le modèle devient-il impossible ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Synthèse : étude d’un chiffre d’affaires

On reprend le chiffre d’affaires (en milliers d’euros) de 2019 à 2024, avec x = année − 2019 :

x : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 y : 242 ; 256 ; 279 ; 298 ; 313 ; 337

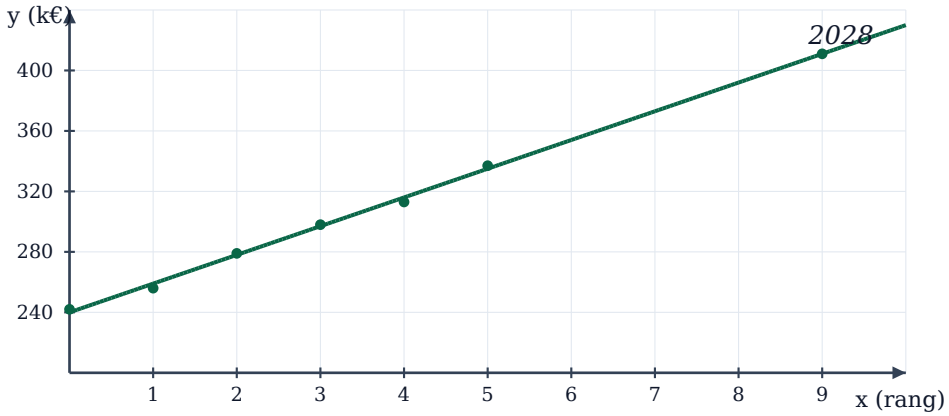
La calculatrice donne $y = 19x + 240$ avec $r \approx 0{,}998$. Le nuage et la droite sont représentés ci-dessous.

1. Interprète les coefficients 19 et 240, ainsi que la valeur de r.

2. Calcule les résidus des années 2019, 2021 et 2024.

3. Estime le chiffre d’affaires de 2026, puis détermine l’année où il dépasserait 400 milliers d’euros.

4. Quelle réserve formuler sur une prévision pour 2050 ?



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).