Suites numériques — Première générale

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une suite, c'est une liste de nombres numérotés : u_0, u_1, u_2… L'indice n'est pas un exposant, et u_n n'est pas une multiplication — deux confusions qui suffisent à faire perdre l'exercice entier. Ces 20 exercices installent d'abord la notation et les deux modes de génération (formule explicite ou relation de récurrence), puis les deux modèles qui reviennent partout : la suite arithmétique, qui ajoute toujours la même chose, et la suite géométrique, qui multiplie toujours par la même chose — c'est-à-dire exactement une évolution à taux constant du chapitre précédent. Les derniers exercices traitent ce que le bac demande vraiment : modéliser une situation, chercher un seuil, et comparer une croissance linéaire à une croissance exponentielle.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-generale/suites-numeriques-introduction

Exercice 1 – Lire la notation d'une suite

Une suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = 3n - 5$. Calcule u_0, u_1, u_5 et u_{10}.

Exercice 2 – Suite définie par récurrence

Une suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$. Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4.

Exercice 3 – Arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre

Pour chacune de ces listes de termes consécutifs, dis si la suite est arithmétique, géométrique, ou ni l'une ni l'autre, en précisant la raison quand elle existe.

1. $3\,;\,7\,;\,11\,;\,15$

2. $2\,;\,6\,;\,18\,;\,54$

3. $1\,;\,4\,;\,9\,;\,16$

4. $20\,;\,15\,;\,10\,;\,5$

5. $64\,;\,32\,;\,16\,;\,8$

Exercice 4 – Terme général d'une suite arithmétique

Une suite arithmétique (u_n) a pour premier terme $u_0 = 7$ et pour raison $r = -3$. Exprime u_n en fonction de n, puis calcule u_{20} et u_{50}.

Exercice 5 – Terme général d'une suite géométrique

Une suite géométrique (v_n) a pour premier terme $v_0 = 5$ et pour raison $q = 2$. Exprime v_n en fonction de n, puis calcule v_{10} et v_{12}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Retrouver une suite arithmétique à partir de deux termes

Une suite arithmétique (u_n) vérifie $u_3 = 11$ et $u_9 = 35$. Détermine sa raison, son premier terme u_0, puis son terme général et u_{20}.

Exercice 7 – Retrouver une suite géométrique à partir de deux termes

Une suite géométrique (v_n) à termes positifs vérifie $v_2 = 18$ et $v_5 = 486$. Détermine sa raison, son premier terme v_0 et son terme général, puis calcule v_8.

Exercice 8 – Sens de variation par la différence

Une suite (u_n) est définie pour $n \geq 0$ par $u_n = n^2 - 6n + 5$.

1. Calcule les termes de u_0 à u_6.

2. Développe et réduis $u_{n+1} - u_n$.

3. Déduis-en le sens de variation de la suite.

Exercice 9 – Une évolution en pourcentage est une suite géométrique

La population d'une ville est de 25 000 habitants en 2026 et baisse de 2 % par an. On note u_n la population n années après 2026, donc $u_0 = 25\,000$.

1. Exprime u_{n+1} en fonction de u_n, puis donne la nature de la suite.

2. Exprime u_n en fonction de n.

3. Estime la population en 2031.

Exercice 10 – Modéliser par une suite arithmétique

Pour financer un projet, Léa dépose 150 € sur un compte à l'ouverture, puis 45 € chaque mois. On note u_n la somme disponible après n mois de versements, donc $u_0 = 150$.

1. Exprime u_{n+1} en fonction de u_n, puis u_n en fonction de n.

2. Quelle somme aura-t-elle au bout d'un an, puis de deux ans ?

3. Au bout de combien de mois dépassera-t-elle 1 000 € ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

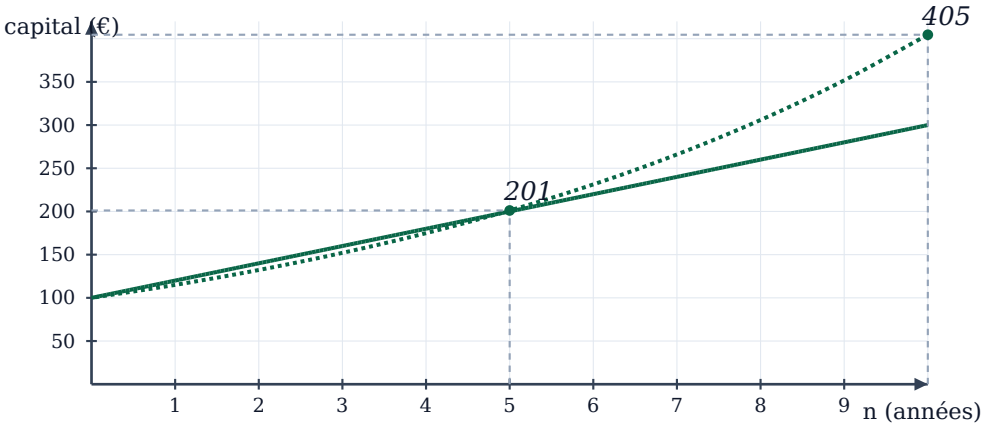
Exercice 11 – Linéaire contre exponentiel : lecture graphique

Deux placements de 100 € sont représentés ci-dessous : le placement A suit la suite $u_n = 100 + 20n$, le placement B la suite $v_n = 100 \times 1{,}15^n$, où n est le nombre d'années. Le tracé en trait plein est celui du placement A, le tracé en pointillés celui du placement B.

1. Donne la nature de chaque suite et sa raison.

2. Par lecture graphique, à partir de quelle année le placement B devient-il le plus avantageux ?

3. Confirme ce résultat par le calcul.



Exercice 12 – Somme de termes par regroupement

Un club de sport propose un défi : le premier mois, on court 20 km ; chaque mois suivant, on ajoute 5 km à la distance du mois précédent. Le défi dure 12 mois.

1. Quelle distance court-on le douzième mois ?

2. Quelle distance totale a-t-on parcourue sur les 12 mois ?

Exercice 13 – Recherche de seuil

On reprend la population $u_n = 25\,000 \times 0{,}98^n$ (baisse de 2 % par an à partir de 2026). À partir de quelle année la population passera-t-elle sous la barre des 20 000 habitants ?

Exercice 14 – Algorithme de calcul de seuil

On considère l'algorithme suivant, écrit en Python, appliqué à la suite $u_n = 25\,000 \times 0{,}98^n$:

u = 25000 n = 0 while u >= 20000 : u = u * 0.98 n = n + 1 print(n)

1. Que contiennent les variables u et n après trois passages dans la boucle ?

2. Qu'affiche cet algorithme ?

3. Comment le modifier pour qu'il affiche la population correspondante en plus du rang ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

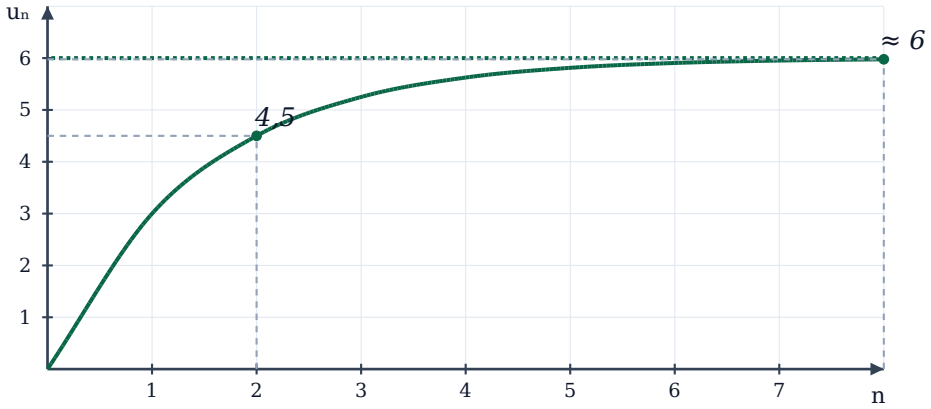
Exercice 15 – Une suite ni arithmétique ni géométrique

Une suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 3$.

1. Calcule u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Montre que cette suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

3. Que semble-t-il se passer quand n devient grand ?



Exercice 16 – Épargne avec intérêts et versements

Un capital de 2 000 € est placé à 3 % par an. Chaque année, juste après le versement des intérêts, on ajoute 600 €. On note u_n le capital après n années, avec $u_0 = 2\,000$.

1. Exprime u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Calcule le capital au bout de 4 ans, au centime près.

3. Compare avec un placement sans intérêts où l'on ajouterait simplement 600 € par an.

Exercice 17 – Deux propositions de salaire

Une entreprise propose deux évolutions de salaire à partir de 30 000 € annuels. Offre A : une augmentation fixe de 1 500 € par an. Offre B : une augmentation de 4 % par an.

1. Exprime A_n et B_n, les salaires après n années, en fonction de n.

2. Compare les deux offres au bout de 5 ans, puis de 10 ans.

3. À partir de quelle année l'offre B devient-elle la plus intéressante ?

Exercice 18 – Décote d'un véhicule

Une voiture achetée 22 000 € perd 18 % de sa valeur la première année, puis 12 % par an les années suivantes. On note v_n sa valeur après n années.

1. Calcule v_1, puis exprime v_n pour $n \geq 1$.

2. Quelle est sa valeur au bout de 5 ans ?

3. Au bout de combien d'années la voiture vaut-elle moins de la moitié de son prix d'achat ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Population avec départs annuels

Une commune compte 40 000 habitants. Chaque année, la population augmente de 1,2 % du fait des naissances, puis 250 habitants quittent la commune. On note u_n la population après n années, avec $u_0 = 40\,000$.

1. Exprime u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Calcule la population après 4 ans, arrondie à l'unité.

3. Existe-t-il une population de départ pour laquelle la commune serait stable ?

Exercice 20 – Synthèse : choisir un plan d'épargne

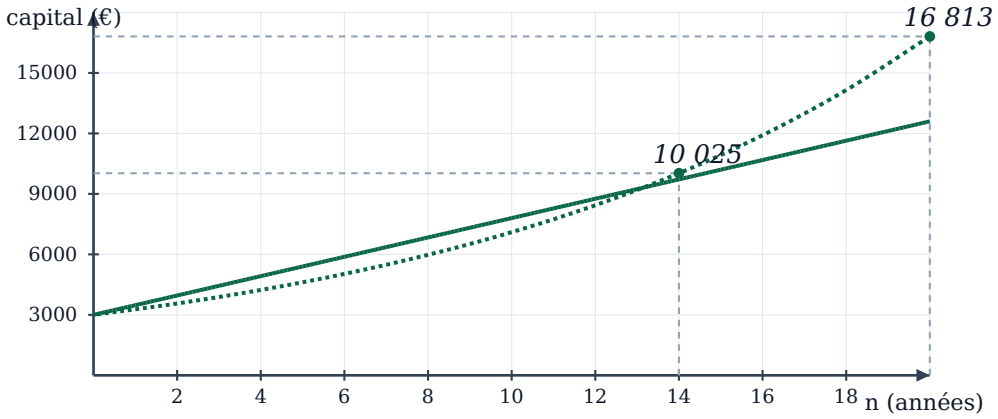
Deux plans d'épargne partent d'un capital de 3 000 €. Le plan A ajoute 480 € chaque année. Le plan B rapporte 9 % par an. Le graphique représente les deux plans sur 20 ans : le trait plein est le plan A, les pointillés le plan B.

1. Donne la nature de chaque suite, sa raison et son terme général.

2. Compare les capitaux au bout de 10 ans.

3. Détermine l'année à partir de laquelle le plan B devient le plus rentable.

4. Quel plan conseiller à quelqu'un qui épargne pour un projet à 20 ans ?



mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Lire la notation d'une suite

La notation u_n se lit « u indice n ». L'indice n désigne le RANG du terme dans la liste : u_0 est le premier terme, u_1 le deuxième, et ainsi de suite.

Ici la suite est donnée par une formule EXPLICITE : u_n s'exprime directement en fonction de n. On peut donc calculer n'importe quel terme sans connaître les précédents.

Calcul de u_0 : on remplace n par 0 dans la formule. $u_0 = 3 \times 0 - 5 = -5$.

Calcul de u_1 : $u_1 = 3 \times 1 - 5 = 3 - 5 = -2$.

Calcul de u_5 : $u_5 = 3 \times 5 - 5 = 15 - 5 = 10$.

Calcul de u_{10} : $u_{10} = 3 \times 10 - 5 = 30 - 5 = 25$.

Contrôle : d'un terme au suivant, on ajoute toujours 3 (de -5 à -2, puis de -2 à 1…). C'est cohérent avec le coefficient de n dans la formule.

Vérification de u_{10} par ce constat : de $u_5 = 10$ à u_{10}, il y a 5 pas de 3, donc $10 + 5 \times 3 = 25$. ✔

Attention au vocabulaire : u_{10} est le ONZIÈME terme de la liste, puisqu'on a commencé à compter à 0. Le rang et la position ne coïncident pas.

Réponse. $u_0 = -5$; $u_1 = -2$; $u_5 = 10$; $u_{10} = 25$.

Rappel de cours. u_n est le terme de RANG n, pas un produit $u \times n$ ni une puissance. Pour une suite explicite, on remplace n par sa valeur.

Erreur fréquente. Lire u_{10} comme « le dixième terme ». Quand la suite commence à u_0, le terme de rang 10 est le onzième de la liste.

Correction de l'exercice 2 – Suite définie par récurrence

Ici la suite est définie par RÉCURRENCE : chaque terme se calcule à partir du précédent, et non à partir de n.

La relation $u_{n+1} = 3u_n - 1$ se lit : « le terme suivant est égal au triple du terme actuel, diminué de 1 ».

Conséquence pratique : on ne peut pas sauter d'étape. Pour obtenir u_4, il faut avoir calculé u_1, u_2 puis u_3.

Calcul de u_1 : on applique la relation avec $n = 0$, donc $u_1 = 3u_0 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 6 - 1 = 5$.

Calcul de u_2 : avec $n = 1$, $u_2 = 3u_1 - 1 = 3 \times 5 - 1 = 15 - 1 = 14$.

Calcul de u_3 : $u_3 = 3u_2 - 1 = 3 \times 14 - 1 = 42 - 1 = 41$.

Calcul de u_4 : $u_4 = 3u_3 - 1 = 3 \times 41 - 1 = 123 - 1 = 122$.

Contrôle de vraisemblance : les termes triplent presque à chaque étape, donc leur croissance doit être très rapide. Passer de 2 à 122 en quatre étapes est cohérent. ✔

Erreur classique à éviter : écrire $u_{n+1} = 3u_n - 1 = 3u_1 - 1$ pour calculer u_2 en gardant l'indice $n + 1$. On remplace n par une VALEUR, on ne mélange pas les deux écritures.

Autre confusion fréquente : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$. Le premier est le terme suivant, le second est le terme actuel augmenté de 1.

Réponse. $u_1 = 5$; $u_2 = 14$; $u_3 = 41$; $u_4 = 122$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Suite par récurrence = calcul en cascade. Il faut le premier terme ET la relation ; l'un sans l'autre ne définit rien.

Erreur fréquente. Confondre u_{n+1} (terme suivant) et $u_n + 1$ (terme actuel plus un). Ici cela donnerait $u_1 = 3$ au lieu de 5.

Correction de l'exercice 3 – Arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre

Méthode : on teste D'ABORD les différences (arithmétique ?), PUIS les quotients (géométrique ?). Une suite peut n'être ni l'une ni l'autre.

Une suite est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en AJOUTANT toujours le même nombre r, appelé raison.

Une suite est géométrique si on passe d'un terme au suivant en MULTIPLIANT toujours par le même nombre q, appelé raison lui aussi.

Liste a) : $7 - 3 = 4$, $11 - 7 = 4$, $15 - 11 = 4$. Les différences sont constantes : suite arithmétique de raison $r = 4$.

Liste b) : $6 - 2 = 4$ mais $18 - 6 = 12$: elle n'est pas arithmétique. On teste les quotients : $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{18}{6} = 3$, $\frac{54}{18} = 3$. Suite géométrique de raison $q = 3$.

Liste c) : différences 3, 5, 7 — non constantes. Quotients : 4, 2,25, $\approx 1{,}78$ — non constants non plus. La suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

On reconnaît d'ailleurs les carrés 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 : c'est une suite parfaitement définie, simplement d'un autre type.

Liste d) : $15 - 20 = -5$, $10 - 15 = -5$, $5 - 10 = -5$. Suite arithmétique de raison $r = -5$. Une raison négative signifie que la suite décroît.

Liste e) : quotients $\frac{32}{64} = 0{,}5$, $\frac{16}{32} = 0{,}5$, $\frac{8}{16} = 0{,}5$. Suite géométrique de raison $q = 0{,}5$.

Repère utile : pour une suite géométrique, une raison comprise strictement entre 0 et 1 fait décroître la suite, une raison supérieure à 1 la fait croître.

Attention : il ne suffit JAMAIS de vérifier une seule différence ou un seul quotient. La liste c) commence par 1 et 4, quotient 4 — conclure trop vite donnerait « géométrique de raison 4 », ce qui est faux dès le terme suivant.

Réponse. a) arithmétique, $r = 4$ · b) géométrique, $q = 3$ · c) ni l'une ni l'autre · d) arithmétique, $r = -5$ · e) géométrique, $q = 0{,}5$.

Rappel de cours. Arithmétique → on teste les DIFFÉRENCES · géométrique → on teste les QUOTIENTS. Toujours sur tous les couples disponibles.

Erreur fréquente. Conclure sur un seul calcul. Il faut vérifier que la différence (ou le quotient) est constante sur TOUS les termes fournis.

Correction de l'exercice 4 – Terme général d'une suite arithmétique

Dans une suite arithmétique, on ajoute la raison à chaque étape. Pour passer de u_0 à u_n, on effectue donc n pas de longueur r.

D'où la formule du terme général : $u_n = u_0 + n \times r$.

On peut la retrouver en déroulant : $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_0 + 2r$, $u_3 = u_0 + 3r$… le coefficient de r suit l'indice.

Ici : $u_n = 7 + n \times (-3)$, soit $u_n = 7 - 3n$.

Calcul de u_{20} : $u_{20} = 7 - 3 \times 20 = 7 - 60 = -53$.

Calcul de u_{50} : $u_{50} = 7 - 3 \times 50 = 7 - 150 = -143$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Vérification sur les premiers termes : $u_0 = 7$, $u_1 = 4$, $u_2 = 1$, $u_3 = -2$. On retire bien 3 à chaque fois. ✔

Contrôle de vraisemblance : la raison est négative, donc la suite décroît, et u_{50} doit être bien plus petit que u_{20}. C'est le cas. ✔

Remarque : $u_n = -3n + 7$ est une expression AFFINE en n. C'est pourquoi les points d'une suite arithmétique sont toujours alignés lorsqu'on les représente graphiquement, la raison jouant le rôle du coefficient directeur.

Réponse. $u_n = 7 - 3n$, donc $u_{20} = -53$ et $u_{50} = -143$.

Rappel de cours. $u_n = u_0 + nr$ si la suite démarre au rang 0. Si elle démarre à u_1, la formule devient $u_n = u_1 + (n-1)r$: compter les PAS, pas les termes.

Erreur fréquente. Écrire $u_n = 7 - 3$ ou oublier le signe de la raison. Une raison négative reste dans la formule : $u_n = 7 + n \times (-3)$.

Correction de l'exercice 5 – Terme général d'une suite géométrique

Dans une suite géométrique, on multiplie par la raison à chaque étape. Pour passer de v_0 à v_n, on multiplie donc n fois par q.

D'où la formule du terme général : $v_n = v_0 \times q^n$.

On la retrouve en déroulant : $v_1 = v_0 \times q$, $v_2 = v_0 \times q \times q = v_0 q^2$, $v_3 = v_0 q^3$… l'exposant suit l'indice.

Ici : $v_n = 5 \times 2^n$.

Calcul de v_{10} : $2^{10} = 1\,024$, donc $v_{10} = 5 \times 1\,024 = 5\,120$.

Calcul de v_{12} : $2^{12} = 4\,096$, donc $v_{12} = 5 \times 4\,096 = 20\,480$.

Vérification par une autre route : $v_{12} = v_{10} \times q^2 = 5\,120 \times 4 = 20\,480$. ✔ Les deux méthodes concordent.

Vérification sur les premiers termes : $v_0 = 5$, $v_1 = 10$, $v_2 = 20$, $v_3 = 40$. On double bien à chaque fois. ✔

Point de vigilance sur la priorité des opérations : 5×2^n signifie « 2 puissance n, puis multiplié par 5 ». Ce n'est pas $(5 \times 2)^n = 10^n$, qui donnerait 10 milliards au rang 10.

Réponse. $v_n = 5 \times 2^n$, donc $v_{10} = 5\,120$ et $v_{12} = 20\,480$.

Rappel de cours. $v_n = v_0 \times q^n$. Arithmétique → $\times n$ devant la raison · géométrique → raison à la PUISSANCE n.

Erreur fréquente. Calculer $(v_0 \times q)^n$ au lieu de $v_0 \times q^n$. La puissance ne porte que sur la raison.

Correction de l'exercice 6 – Retrouver une suite arithmétique à partir de deux termes

Entre le rang 3 et le rang 9, il y a $9 - 3 = 6$ pas, chacun valant la raison r.

On peut donc écrire $u_9 = u_3 + 6r$, relation générale qui évite de repasser par u_0.

En remplaçant : $35 = 11 + 6r$, d'où $6r = 35 - 11 = 24$, donc $r = 4$.

Formulation équivalente à connaître : $r = \dfrac{u_9 - u_3}{9 - 3} = \dfrac{24}{6} = 4$. On reconnaît le calcul d'un coefficient directeur.

Pour u_0, on remonte de 3 pas depuis u_3 : $u_0 = u_3 - 3r = 11 - 3 \times 4 = 11 - 12 = -1$.

Terme général : $u_n = u_0 + nr = -1 + 4n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Vérification sur les deux données de l'énoncé. $u_3 = -1 + 4 \times 3 = -1 + 12 = 11$ ✔ et $u_9 = -1 + 4 \times 9 = -1 + 36 = 35$ ✔.

Calcul demandé : $u_{20} = -1 + 4 \times 20 = -1 + 80 = 79$.

Contrôle par un autre chemin : $u_{20} = u_9 + 11r = 35 + 11 \times 4 = 35 + 44 = 79$. ✔

Erreur à éviter sur le nombre de pas : entre le rang 3 et le rang 9 il y a 6 intervalles, pas 7 — même si l'on énumère 7 termes de u_3 à u_9. On compte les SAUTS, pas les termes.

Réponse. $r = 4$, $u_0 = -1$, $u_n = -1 + 4n$ et $u_{20} = 79$.

Rappel de cours. Formule générale : $u_p = u_k + (p - k)\,r$, valable dans les deux sens. La raison se lit comme un coefficient directeur.

Erreur fréquente. Diviser par 9 au lieu de $9 - 3$. On trouverait une raison de 2,67 qui ne vérifie aucune des deux données.

Correction de l'exercice 7 – Retrouver une suite géométrique à partir de deux termes

Le raisonnement est le même que pour une suite arithmétique, mais avec des multiplications : entre le rang 2 et le rang 5, il y a 3 pas, donc 3 multiplications par q.

On écrit donc $v_5 = v_2 \times q^3$.

En remplaçant : $486 = 18 \times q^3$, d'où $q^3 = \dfrac{486}{18} = 27$.

Comme $27 = 3^3$ et que la suite est à termes positifs, on obtient $q = 3$.

Pour v_0, on remonte de 2 pas depuis v_2, donc on DIVISE deux fois par q :
$v_0 = \dfrac{v_2}{q^2} = \dfrac{18}{9} = 2$.

Terme général : $v_n = 2 \times 3^n$.

Vérification sur les données. $v_2 = 2 \times 9 = 18$ ✔ et $v_5 = 2 \times 243 = 486$ ✔.

Calcul demandé : $3^8 = 6\,561$, donc $v_8 = 2 \times 6\,561 = 13\,122$.

Contrôle par un autre chemin : $v_8 = v_5 \times q^3 = 486 \times 27 = 13\,122$. ✔

Remarque de méthode : pour remonter dans une suite géométrique on divise par la raison, alors que dans une suite arithmétique on soustrait la raison. L'opération inverse change de nature selon le type de suite.

Réponse. $q = 3$, $v_0 = 2$, $v_n = 2 \times 3^n$ et $v_8 = 13\,122$.

Rappel de cours. Formule générale : $v_p = v_k \times q^{p-k}$. Pour trouver q, on isole q^{p-k} puis on prend la racine correspondante.

Erreur fréquente. Diviser 486 par 18 et annoncer $q = 27$. C'est q^3 qui vaut 27 ; la raison est sa racine cubique, soit 3.

Correction de l'exercice 8 – Sens de variation par la différence

Calcul des premiers termes en remplaçant n par chaque valeur.

$u_0 = 0 - 0 + 5 = 5$; $u_1 = 1 - 6 + 5 = 0$; $u_2 = 4 - 12 + 5 = -3$; $u_3 = 9 - 18 + 5 = -4$.

$u_4 = 16 - 24 + 5 = -3$; $u_5 = 25 - 30 + 5 = 0$; $u_6 = 36 - 36 + 5 = 5$.

On observe une décroissance jusqu'au rang 3, puis une croissance. La suite n'est donc ni croissante ni décroissante sur tout son domaine.

Pour le prouver, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$: positive, la suite croît ; négative, elle décroît.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$u_{n+1} = (n+1)^2 - 6(n+1) + 5$. On développe : $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ et $-6(n+1) = -6n - 6$.

Donc $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 + 5 = n^2 - 4n$.

Différence : $u_{n+1} - u_n = (n^2 - 4n) - (n^2 - 6n + 5)$. Attention au signe devant la parenthèse : $= n^2 - 4n - n^2 + 6n - 5$.

Après réduction : $u_{n+1} - u_n = 2n - 5$.

Signe : $2n - 5 < 0$ équivaut à $n < 2{,}5$, c'est-à-dire $n \leq 2$ pour un entier. Et $2n - 5 > 0$ équivaut à $n \geq 3$.

Conclusion : la suite est décroissante de u_0 à u_3, puis croissante à partir de u_3. Son minimum vaut $u_3 = -4$.

Vérification sur les valeurs calculées : $u_3 - u_2 = -4 - (-3) = -1$, ce qui correspond bien à $2 \times 2 - 5 = -1$ ✔ ; et $u_4 - u_3 = -3 - (-4) = 1 = 2 \times 3 - 5$ ✔.

Réponse. $5\,;0\,;-3\,;-4\,;-3\,;0\,;5$ · $u_{n+1} - u_n = 2n - 5$ · décroissante jusqu'au rang 3, croissante ensuite (minimum $u_3 = -4$).

Rappel de cours. Sens de variation : on étudie le SIGNE de $u_{n+1} - u_n$. Le résultat peut dépendre de n : une suite n'est pas forcément monotone.

Erreur fréquente. Oublier de distribuer le signe moins sur toute la parenthèse de u_n. On obtiendrait $2n - 5 + 10$ ou une expression fausse, donc un sens de variation erroné.

Correction de l'exercice 9 – Une évolution en pourcentage est une suite géométrique

Une baisse de 2 % correspond au coefficient multiplicateur $1 - 0{,}02 = 0{,}98$, vu au chapitre précédent.

Chaque année, la population est donc multipliée par 0,98 : $u_{n+1} = 0{,}98 \times u_n$.

Cette relation est exactement la définition d'une suite GÉOMÉTRIQUE de raison $q = 0{,}98$. C'est le lien central du chapitre : une évolution à taux constant est une suite géométrique, et réciproquement.

Terme général : $u_n = u_0 \times q^n = 25\,000 \times 0{,}98^{\,n}$.

Pour 2031, il faut identifier le bon rang : $2031 - 2026 = 5$, donc on cherche u_5.

$u_5 = 25\,000 \times 0{,}98^{\,5}$.

À la calculatrice, $0{,}98^{\,5} \approx 0{,}903921$.

Donc $u_5 \approx 25\,000 \times 0{,}903921 \approx 22\,598{,}02$, soit environ 22 598 habitants.

Contrôle de vraisemblance : cinq baisses de 2 % donnent un peu moins que 10 % de baisse totale (9,61 % exactement), donc un résultat un peu au-dessus de 22 500. ✔

Erreur fréquente : appliquer −10 % en additionnant les taux, ce qui donnerait 22 500 habitants. L'écart est ici modeste, mais la méthode est fausse et le devient d'autant plus que le nombre d'années grandit.

Autre erreur : prendre $n = 2031$ dans la formule. Le rang compte les années ÉCOULÉES depuis l'origine, pas le millésime.

Réponse. $u_{n+1} = 0{,}98\,u_n$: suite géométrique de raison 0,98 · $u_n = 25\,000 \times 0{,}98^{\,n}$ · environ 22 598 habitants en 2031.

Rappel de cours. Évolution de t % par période ⇔ suite géométrique de raison $q = 1 + \dfrac{t}{100}$. Les deux chapitres décrivent le même objet.

Erreur fréquente. Mal caler le rang : u_0 correspond à l'année de départ, donc l'année

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2026 + n correspond à u_n. 2031 donne $n = 5$, pas $n = 6$.

Correction de l'exercice 10 – Modéliser par une suite arithmétique

Chaque mois, la somme AUGMENTE d'un montant fixe de 45 € : on ajoute toujours la même chose, c'est donc une suite arithmétique.

Relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + 45$, de raison $r = 45$.

Terme général : $u_n = u_0 + nr = 150 + 45n$.

Au bout d'un an, $n = 12$: $u_{12} = 150 + 45 \times 12 = 150 + 540 = 690$ €.

Au bout de deux ans, $n = 24$: $u_{24} = 150 + 45 \times 24 = 150 + 1\,080 = 1\,230$ €.

Pour le seuil, on résout l'inéquation $150 + 45n > 1\,000$.

$45n > 850$, donc $n > \dfrac{850}{45} \approx 18{,}89$.

Comme n est un nombre entier de mois, le premier rang qui convient est $n = 19$.

Vérification : $u_{18} = 150 + 810 = 960$ € (insuffisant) et $u_{19} = 150 + 855 = 1\,005$ € (dépassement atteint). ✔

Remarque : contrairement à un placement à intérêts, ce modèle n'est PAS géométrique — la somme versée ne dépend pas de ce qui est déjà sur le compte. Le graphique correspondant serait une droite.

Réponse. $u_{n+1} = u_n + 45$ et $u_n = 150 + 45n$ · 690 € après un an, 1 230 € après deux ans · seuil dépassé au 19^{e} mois.

Rappel de cours. Montant fixe ajouté → arithmétique. Pourcentage appliqué → géométrique. C'est la première question à trancher devant un énoncé de modélisation.

Erreur fréquente. Répondre $n \approx 18{,}9$ mois. Un rang est un entier : il faut conclure par le premier entier qui vérifie l'inéquation, en le vérifiant.

Correction de l'exercice 11 – Linéaire contre exponentiel : lecture graphique

Le placement A ajoute 20 € chaque année, indépendamment du capital : c'est une suite arithmétique de raison $r = 20$. Ses points sont alignés.

Le placement B multiplie le capital par 1,15 chaque année, ce qui correspond à +15 % par an : c'est une suite géométrique de raison $q = 1{,}15$. Sa courbe s'incurve vers le haut.

Attention à une confusion de lecture : une suite n'est définie qu'aux rangs entiers. Le tracé continu n'est qu'une aide visuelle ; seuls les points d'abscisse entière ont un sens.

Lecture graphique : au départ B est en dessous de A, puis les deux courbes se croisent entre les rangs 4 et 5. À partir de $n = 5$, B passe au-dessus.

Confirmation par le calcul, année par année autour du croisement.

Rang 4 : $u_4 = 100 + 80 = 180$ € et $v_4 = 100 \times 1{,}15^4$. Or $1{,}15^4 \approx 1{,}749$, donc $v_4 \approx 174{,}90$ € : A est encore devant.

Rang 5 : $u_5 = 100 + 100 = 200$ € et $1{,}15^5 \approx 2{,}0114$, donc $v_5 \approx 201{,}14$ € : B passe devant.

C'est donc bien à partir de la cinquième année que le placement B devient le plus avantageux. ✔

Rang 10, pour mesurer l'ampleur du phénomène : $u_{10} = 300$ € contre $v_{10} = 100 \times 1{,}15^{10} \approx 404{,}56$ €. L'écart s'est creusé.

Idée à retenir : une croissance arithmétique produit une droite, une croissance géométrique de raison supérieure à 1 une courbe qui monte de plus en plus vite. La seconde finit TOUJOURS par dépasser la première, même en partant plus lentement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. A : arithmétique de raison 20 · B : géométrique de raison 1,15 · B devient plus avantageux à partir de $n = 5$ (201,14 € contre 200 €).

Rappel de cours. Suite arithmétique = points alignés · suite géométrique de raison > 1 = croissance de plus en plus rapide, qui rattrape toujours une droite.

Erreur fréquente. Conclure « B est meilleur » ou « A est meilleur » sans préciser à partir de quel rang. Sur les quatre premières années, c'est bien A qui l'emporte.

Correction de l'exercice 12 – Somme de termes par regroupement

On note $u_1 = 20$ la distance du premier mois. La suite est arithmétique de raison $r = 5$, et elle démarre au rang 1.

Comme le premier terme est u_1, la formule devient $u_n = u_1 + (n-1) \times r$: du mois 1 au mois n, il y a $n - 1$ ajouts.

Douzième mois : $u_{12} = 20 + (12-1) \times 5 = 20 + 55 = 75$ km.

Vérification en énumérant : $20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75$. Le douzième terme vaut bien 75. ✔

Pour la distance totale, on additionne ces 12 nombres. Plutôt que de tout cumuler, on utilise le regroupement par paires — l'astuce attribuée à Gauss.

On associe le premier et le dernier terme : $20 + 75 = 95$. Puis le deuxième et l'avant-dernier : $25 + 70 = 95$. Puis $30 + 65 = 95$.

Toutes les paires donnent la même somme : quand on avance d'un rang à gauche, on ajoute 5, et quand on recule d'un rang à droite, on retire 5 — les deux effets se compensent exactement.

Avec 12 termes, on forme 6 paires valant chacune 95.

Total : $6 \times 95 = 570$ km.

Formulation générale de ce raisonnement : somme $= \dfrac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$, soit ici $\dfrac{12 \times (20 + 75)}{2} = \dfrac{12 \times 95}{2} = 570$. ✔

Contrôle de vraisemblance : la distance moyenne mensuelle est $\dfrac{20 + 75}{2} = 47{,}5$ km, et $12 \times 47{,}5 = 570$ km. ✔ La moyenne d'une suite arithmétique est bien la moyenne de ses termes extrêmes.

Réponse. 75 km le douzième mois · 570 km au total.

Rappel de cours. Somme d'une suite arithmétique : $\dfrac{n \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$. Cette formule se RETROUVE par le regroupement en paires, il est inutile de l'apprendre par cœur.

Erreur fréquente. Utiliser $u_n = u_0 + nr$ alors que la suite démarre à u_1. On obtiendrait 80 km au lieu de 75 : toujours vérifier le rang du premier terme.

Correction de l'exercice 13 – Recherche de seuil

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n < 20\,000$, c'est-à-dire $25\,000 \times 0{,}98^n < 20\,000$.

On isole la puissance en divisant les deux membres par 25 000 : $0{,}98^n < \dfrac{20\,000}{25\,000} = 0{,}8$.

Cette inéquation ne se résout pas « à la main » avec les outils de Première générale : on procède par BALAYAGE, en testant les valeurs successives de n, à la calculatrice ou au tableur.

$n = 10$: $0{,}98^{10} \approx 0{,}8171$, donc $u_{10} \approx 20\,426{,}82$ — encore au-dessus.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$n = 11$: $0{,}98^{11} \approx 0{,}8007$, donc $u_{11} \approx 20\,018{,}28$ — toujours au-dessus, mais de très peu.

$n = 12$: $0{,}98^{12} \approx 0{,}7847$, donc $u_{12} \approx 19\,617{,}92$ — le seuil est franchi.

Le premier rang qui convient est donc $n = 12$.

Il reste à traduire ce rang en année : u_0 correspond à 2026, donc u_{12} correspond à $2026 + 12 = 2038$.

Vérification du caractère « premier » du rang : $u_{11} \approx 20\,018 > 20\,000$, donc l'année 2037 ne convient pas. $n = 12$ est bien le premier. ✔

Point de méthode : comme la suite est strictement décroissante, dès qu'un rang vérifie l'inégalité, tous les suivants la vérifient aussi. Il suffit donc d'encadrer le seuil entre deux rangs consécutifs.

Remarque : au tableur, on remplit une colonne n et une colonne u_n avec la formule « `=25000*0,98^n` », puis on lit la première ligne passant sous 20 000. En Python, une boucle « while » sur la condition donne le même résultat.

Réponse. $n = 12$, soit l'année 2038 ($u_{11} \approx 20\,018$ et $u_{12} \approx 19\,618$).

Rappel de cours. Un seuil se cherche par balayage, puis se JUSTIFIE en montrant que le rang précédent ne convient pas et que le rang trouvé convient.

Erreur fréquente. Donner le rang 12 comme réponse finale alors que la question porte sur une ANNÉE. Il faut convertir : $2026 + 12 = 2038$.

Correction de l'exercice 14 – Algorithme de calcul de seuil

Le principe : tant que la population reste supérieure ou égale à 20 000, on applique une baisse de 2 % et on compte une année de plus.

Avant la boucle, $u = 25\,000$ et $n = 0$: c'est la situation de départ, en 2026.

Premier passage : $u = 25\,000 \times 0{,}98 = 24\,500$ et $n = 1$.

Deuxième passage : $u = 24\,500 \times 0{,}98 = 24\,010$ et $n = 2$.

Troisième passage : $u = 24\,010 \times 0{,}98 = 23\,529{,}8$ et $n = 3$.

On remarque que les deux variables restent synchronisées : après k passages, u vaut u_k et n vaut k. C'est ce qui rend l'algorithme correct.

La boucle s'arrête dès que la condition « u >= 20000 » devient fausse, c'est-à-dire au premier rang où la population passe SOUS 20 000.

D'après l'exercice précédent, ce rang est 12 : l'algorithme affiche donc 12.

Point important : la valeur affichée est le rang APRÈS la dernière multiplication. Si l'on avait incrémenté n avant de modifier u, le résultat serait identique ici, mais l'ordre des instructions doit toujours être vérifié sur les premiers tours.

Pour afficher aussi la population, il suffit de compléter la dernière ligne : « print(n, u) », ou de façon plus lisible « print(n, round(u)) », ce qui donnerait 12 et 19 618.

Contrôle du bon fonctionnement : la suite est décroissante et tend vers 0, donc la condition finira nécessairement par être fausse. L'algorithme se termine — ce ne serait pas le cas avec une raison supérieure à 1, où la boucle tournerait indéfiniment.

Réponse. Après trois passages : $u = 23\,529{,}8$ et $n = 3$ · l'algorithme affiche 12 · il suffit d'écrire « print(n, u) » pour obtenir aussi la population (environ 19 618).

Rappel de cours. Pour comprendre une boucle, on construit un tableau d'évolution des variables sur les trois premiers tours : c'est plus sûr que de raisonner en bloc.

Erreur fréquente. Croire que l'algorithme s'arrête quand u vaut exactement 20 000. Il

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

s'arrête au premier passage STRICTEMENT en dessous ; la condition d'arrêt est la négation de celle du while.

Correction de l'exercice 15 – Une suite ni arithmétique ni géométrique

Calcul des premiers termes en appliquant la relation de récurrence.

$u_1 = 0{,}5 \times 0 + 3 = 3$.

$u_2 = 0{,}5 \times 3 + 3 = 1{,}5 + 3 = 4{,}5$.

$u_3 = 0{,}5 \times 4{,}5 + 3 = 2{,}25 + 3 = 5{,}25$.

$u_4 = 0{,}5 \times 5{,}25 + 3 = 2{,}625 + 3 = 5{,}625$.

Test « arithmétique » : $u_1 - u_0 = 3$ mais $u_2 - u_1 = 1{,}5$. Les différences ne sont pas constantes, la suite n'est pas arithmétique.

Test « géométrique » : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$ mais $\frac{u_3}{u_2} = \frac{5{,}25}{4{,}5} \approx 1{,}167$. Les quotients ne sont pas constants non plus.

Un seul contre-exemple suffit dans chaque cas : la suite n'est ni arithmétique ni géométrique. C'est le comportement le plus courant — les deux modèles du cours sont des cas particuliers.

Pour le comportement à long terme, on poursuit : $u_5 = 5{,}8125$, $u_6 \approx 5{,}906$, $u_7 \approx 5{,}953$, $u_8 \approx 5{,}977$.

Les termes croissent mais se rapprochent de plus en plus de 6 sans jamais l'atteindre : la suite semble se stabiliser vers 6.

On peut le justifier simplement : si la suite se stabilisait autour d'une valeur x, on aurait $x = 0{,}5x + 3$, donc $0{,}5x = 3$ et $x = 6$.

Interprétation : à chaque étape, la moitié de l'écart avec 6 disparaît. L'écart initial vaut 6, puis 3, puis 1,5, puis 0,75… il est divisé par deux à chaque fois. ✔

Vérification de cette lecture : $6 - u_3 = 0{,}75$ et $6 - u_4 = 0{,}375$, soit bien la moitié. ✔ Sur le graphique, la droite en pointillés d'équation $y = 6$ matérialise cette valeur limite, que la suite approche sans jamais l'atteindre.

Réponse. $u_1 = 3$; $u_2 = 4{,}5$; $u_3 = 5{,}25$; $u_4 = 5{,}625$ · ni arithmétique (différences 3 puis 1,5) ni géométrique (quotients 1,5 puis ≈ 1,167) · les termes se rapprochent de 6.

Rappel de cours. Pour montrer qu'une suite n'est PAS arithmétique (ou géométrique), un seul contre-exemple sur deux différences (ou deux quotients) suffit.

Erreur fréquente. Conclure « géométrique de raison 1,5 » à partir du seul quotient $\frac{u_2}{u_1}$. Il faut toujours en tester au moins deux.

Correction de l'exercice 16 – Épargne avec intérêts et versements

Chaque année, deux opérations se succèdent : le capital est d'abord multiplié par 1,03 (intérêts de 3 %), puis augmenté de 600 € (versement).

D'où la relation : $u_{n+1} = 1{,}03\,u_n + 600$.

Cette suite n'est ni arithmétique (on ne se contente pas d'ajouter) ni géométrique (on ne se contente pas de multiplier). C'est le modèle réaliste d'un plan d'épargne.

Calcul de u_1 : $2\,000 \times 1{,}03 = 2\,060$, puis +600, donc $u_1 = 2\,660$ €.

Calcul de u_2 : $2\,660 \times 1{,}03 = 2\,739{,}80$, puis +600, donc $u_2 = 3\,339{,}80$ €.

Calcul de u_3 : $3\,339{,}80 \times 1{,}03 = 3\,439{,}994$, puis +600, donc $u_3 = 4\,039{,}994$ €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Calcul de u_4 : $4\,039{,}994 \times 1{,}03 = 4\,161{,}19382$, puis $+600$, donc $u_4 \approx 4\,761{,}19$ €.

Sans intérêts, le capital serait $2\,000 + 4 \times 600 = 4\,400$ €.

Les intérêts ont donc rapporté $4\,761{,}19 - 4\,400 = 361{,}19$ € sur quatre ans.

Contrôle de vraisemblance : le capital moyen sur la période est de l'ordre de 3 200 €, et $3\,200 \times 0{,}03 \times 4 \approx 384$ €. L'ordre de grandeur est correct. ✔

Point de méthode important : on conserve toutes les décimales dans les calculs intermédiaires et on n'arrondit qu'à la fin. Arrondir u_3 à 4 040 € donnerait 4 761,20 € — une erreur d'un centime qui s'amplifie sur un grand nombre d'années.

Attention aussi à l'ORDRE des deux opérations : si le versement avait lieu AVANT le calcul des intérêts, la relation serait $u_{n+1} = 1{,}03(u_n + 600)$, et u_1 vaudrait 2 678 € au lieu de 2 660 €.

Réponse. $u_{n+1} = 1{,}03\,u_n + 600$ · $u_4 \approx 4\,761{,}19$ € · soit 361,19 € de plus que les 4 400 € obtenus sans intérêts.

Rappel de cours. Un modèle « pourcentage + versement fixe » n'est ni arithmétique ni géométrique. On calcule les termes un par un, sans chercher de formule explicite en Première.

Erreur fréquente. Inverser l'ordre des opérations dans l'année. Lire précisément l'énoncé : ici les intérêts portent sur le capital AVANT le nouveau versement.

Correction de l'exercice 17 – Deux propositions de salaire

Offre A : on ajoute chaque année le même montant, c'est une suite arithmétique de raison 1 500. Donc $A_n = 30\,000 + 1\,500n$.

Offre B : on multiplie chaque année par 1,04, c'est une suite géométrique de raison 1,04. Donc $B_n = 30\,000 \times 1{,}04^{\,n}$.

Au bout de 5 ans : $A_5 = 30\,000 + 7\,500 = 37\,500$ €.

$1{,}04^{5} \approx 1{,}21665$, donc $B_5 \approx 36\,499{,}59$ €. L'offre A est devant, de près de 1 000 €.

Au bout de 10 ans : $A_{10} = 30\,000 + 15\,000 = 45\,000$ €.

$1{,}04^{10} \approx 1{,}48024$, donc $B_{10} \approx 44\,407{,}33$ €. L'offre A est encore devant, mais l'écart s'est réduit à environ 590 €.

Cette réduction de l'écart annonce un croisement : on cherche donc le premier rang où $B_n > A_n$ par balayage.

$n = 11$: $A_{11} = 46\,500$ € et $B_{11} \approx 46\,183{,}62$ € — A reste devant.

$n = 12$: $A_{12} = 48\,000$ € et $B_{12} \approx 48\,030{,}97$ € — B passe devant, de 30,97 €.

L'offre B devient donc la plus intéressante à partir de la douzième année.

Vérification que le croisement est définitif : $n = 13$ donne $A_{13} = 49\,500$ € contre $B_{13} \approx 49\,952{,}21$ €. L'écart se creuse en faveur de B. ✔

Interprétation : l'offre A ajoute toujours 1 500 €, alors que l'offre B ajoute 4 % d'un salaire qui grandit — soit 1 200 € la première année, mais plus de 1 800 € à partir de la douzième. C'est le mécanisme de tout rattrapage exponentiel.

Conclusion pratique : le choix dépend de la durée envisagée dans l'entreprise. Sur cinq ans, A est nettement préférable ; au-delà de douze ans, B l'emporte et l'écart grandit ensuite.

Réponse. $A_n = 30\,000 + 1\,500n$ et $B_n = 30\,000 \times 1{,}04^{\,n}$ · A devant à 5 ans (37 500 contre 36 500) et à 10 ans (45 000 contre 44 407) · B devient plus intéressante à partir de la 12^{e} année.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Comparaison linéaire / exponentiel : on tabule, on encadre le croisement entre deux rangs consécutifs, on conclut avec les deux valeurs.

Erreur fréquente. Comparer les seuls taux de départ (1 500 € contre 1 200 €) et conclure que A est toujours meilleure. Le pourcentage s'applique à une base croissante.

Correction de l'exercice 18 – Décote d'un véhicule

Première année : une baisse de 18 % correspond au coefficient 0,82.

$v_1 = 22\,000 \times 0{,}82 = 18\,040$ €.

À partir de là, chaque année multiplie la valeur par 0,88 (baisse de 12 %). La suite est géométrique de raison 0,88, mais SEULEMENT à partir du rang 1.

Pour aller du rang 1 au rang n, il y a $n-1$ multiplications par 0,88. D'où $v_n = 18\,040 \times 0{,}88^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Valeur au bout de 5 ans : $v_5 = 18\,040 \times 0{,}88^4$.

$0{,}88^2 = 0{,}7744$, donc $0{,}88^4 = 0{,}7744^2 \approx 0{,}599695$.

$v_5 \approx 18\,040 \times 0{,}599695 \approx 10\,818{,}50$ €.

Pour la dernière question, la moitié du prix d'achat vaut 11 000 €. On cherche le premier rang tel que $v_n < 11\,000$.

$v_3 = 18\,040 \times 0{,}88^2 = 18\,040 \times 0{,}7744 \approx 13\,970{,}18$ € — au-dessus.

$v_4 = 18\,040 \times 0{,}88^3 \approx 18\,040 \times 0{,}681472 \approx 12\,293{,}75$ € — encore au-dessus.

$v_5 \approx 10\,818{,}50$ € — cette fois le seuil est franchi.

La voiture vaut donc moins de la moitié de son prix d'achat au bout de 5 ans. ✔

Contrôle de vraisemblance : perdre la moitié de sa valeur en cinq ans correspond à une décote annuelle moyenne d'environ 13 %, cohérente avec les taux de l'énoncé. ✔

Attention au décalage d'indice : l'exposant est $n-1$ et non n, parce que la première année suit une règle différente. Écrire $18\,040 \times 0{,}88^5$ donnerait 9 520,28 € — la valeur au bout de SIX ans.

Réponse. $v_1 = 18\,040$ € et $v_n = 18\,040 \times 0{,}88^{n-1}$ · $v_5 \approx 10\,818{,}50$ € · la valeur passe sous 11 000 € au bout de 5 ans.

Rappel de cours. Quand la première période suit une règle particulière, on repart du premier terme « régulier » et l'exposant compte les pas restants : $n-1$, pas n.

Erreur fréquente. Appliquer $0{,}88^n$ dès le rang 1. Cela ajoute une année de décote et fausse toutes les réponses suivantes.

Correction de l'exercice 19 – Population avec départs annuels

Deux effets se succèdent chaque année : une hausse de 1,2 % (coefficient 1,012), puis un départ de 250 personnes.

Relation de récurrence : $u_{n+1} = 1{,}012\,u_n - 250$.

Calcul de u_1 : $40\,000 \times 1{,}012 = 40\,480$, puis -250, donc $u_1 = 40\,230$.

Calcul de u_2 : $40\,230 \times 1{,}012 = 40\,712{,}76$, puis -250, donc $u_2 = 40\,462{,}76$.

Calcul de u_3 : $40\,462{,}76 \times 1{,}012 \approx 40\,948{,}313$, puis -250, donc $u_3 \approx 40\,698{,}313$.

Calcul de u_4 : $40\,698{,}313 \times 1{,}012 \approx 41\,186{,}693$, puis -250, donc $u_4 \approx 40\,936{,}69$, soit environ 40 937 habitants.

On garde les décimales dans les calculs intermédiaires : ce sont des populations

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

« moyennes » issues d'un modèle, pas des personnes réelles. On n'arrondit qu'à la toute fin.

Pour la stabilité, on cherche une valeur x telle que, partant de x, la population reste égale à x : $1{,}012x - 250 = x$.

On regroupe : $1{,}012x - x = 250$, soit $0{,}012x = 250$.

D'où $x = \dfrac{250}{0{,}012} \approx 20\,833{,}33$ habitants.

Vérification : $20\,833{,}33 \times 1{,}012 \approx 21\,083{,}33$, puis -250 redonne bien $20\,833{,}33$. ✔

Interprétation : avec environ 20 833 habitants, les naissances compensent exactement les 250 départs. Cette valeur s'appelle un point d'équilibre.

Comme la commune compte 40 000 habitants, soit bien plus que ce seuil, les naissances (480 la première année) dépassent les départs : la population augmente, ce que confirment les calculs. ✔

Conséquence utile pour se relire : sous 20 833 habitants, le même modèle produirait au contraire une décroissance — le signe de l'évolution dépend de la position par rapport au point d'équilibre.

Réponse. $u_{n+1} = 1{,}012\,u_n - 250$ · environ 40 937 habitants après 4 ans · population d'équilibre $\approx 20\,833$ habitants.

Rappel de cours. Point d'équilibre d'un modèle $u_{n+1} = a\,u_n + b$: on résout $ax + b = x$. Au-dessus, la suite croît (si $a > 1$) ; en dessous, elle décroît.

Erreur fréquente. Soustraire les 250 départs AVANT d'appliquer la hausse. On obtiendrait $u_1 = 40\,227$ au lieu de 40 230 : l'ordre imposé par l'énoncé compte.

Correction de l'exercice 20 – Synthèse : choisir un plan d'épargne

Plan A : montant fixe ajouté chaque année, donc suite arithmétique de raison $r = 480$, de terme général $A_n = 3\,000 + 480n$.

Plan B : pourcentage appliqué au capital, donc suite géométrique de raison $q = 1{,}09$, de terme général $B_n = 3\,000 \times 1{,}09^{\,n}$.

Au bout de 10 ans : $A_{10} = 3\,000 + 4\,800 = 7\,800$ €.

$1{,}09^{10} \approx 2{,}36736$, donc $B_{10} \approx 7\,102{,}09$ €. Le plan A est devant d'environ 698 €.

Pour le croisement, on tabule autour de la zone où les courbes se rejoignent sur le graphique, entre 12 et 15 ans.

$n = 13$: $A_{13} = 3\,000 + 6\,240 = 9\,240$ € et $B_{13} \approx 9\,197{,}41$ € — A est encore devant, de 42,59 €.

$n = 14$: $A_{14} = 3\,000 + 6\,720 = 9\,720$ € et $B_{14} \approx 10\,025{,}18$ € — B passe devant, de plus de 305 €.

Le plan B devient donc le plus rentable à partir de la quatorzième année.

Vérification que le dépassement est durable : $n = 15$ donne $A_{15} = 10\,200$ € contre $B_{15} \approx 10\,927{,}45$ €. L'écart continue de croître. ✔

Au bout de 20 ans : $A_{20} = 3\,000 + 9\,600 = 12\,600$ € et $B_{20} = 3\,000 \times 1{,}09^{20} \approx 16\,813{,}23$ €.

Le plan B rapporte alors 4 213,23 € de plus, soit un tiers de capital supplémentaire.

Conseil argumenté : pour un projet à 20 ans, le plan B est nettement préférable. Pour un projet à moins de 14 ans, c'est le plan A qui l'emporte — le choix dépend entièrement de l'horizon de temps.

Ce que montre cet exercice, et qui vaut pour tout le chapitre : une suite arithmétique

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

progresse d’un pas constant, une suite géométrique de raison supérieure à 1 accélère. La seconde part souvent moins vite, mais finit toujours par dépasser la première, et l’écart devient ensuite considérable.

Réponse. $A_n = 3\,000 + 480n$ (arithmétique, $r = 480$) et $B_n = 3\,000 \times 1{,}09^{\,n}$ (géométrique, $q = 1{,}09$) · à 10 ans A mène (7 800 € contre 7 102 €) · B devient plus rentable à partir de la 14^{e} année · à 20 ans, B rapporte 16 813 € contre 12 600 € : c’est lui qu’il faut conseiller.

Rappel de cours. Toujours conclure une comparaison par « à partir de quel rang », jamais par un vainqueur absolu : les deux modèles gagnent à des horizons différents.

Erreur fréquente. Lire le croisement au jugé sur le graphique et annoncer 13 ans. Au rang 13, A mène encore de 42,59 € : seul le calcul tranche.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).