Discriminant — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Le discriminant d'un trinôme $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est $\Delta = b^2 - 4ac$. Son signe décide tout : $\Delta > 0$ donne deux racines, $\Delta = 0$ une racine double, $\Delta < 0$ aucune racine réelle. Ces exercices corrigés couvrent le calcul du discriminant, le nombre de racines, la discussion selon un paramètre et le lien avec le signe du trinôme. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/discriminant

Exercice 1 – Calculer un discriminant

Calculer le discriminant de $x^2 + 3x - 4$.

Exercice 2 – Discriminant avec a négatif

Calculer le discriminant de $-2x^2 + 4x - 1$.

Exercice 3 – Nombre de racines

Sans les calculer, dire combien de racines ont : $x^2 + 1$; $x^2 - 6x + 9$; $x^2 - x - 2$.

Exercice 4 – Discriminant avec une fraction

Calculer le discriminant de $x^2 - x + \frac{1}{4}$, puis résoudre $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.

Exercice 5 – Racines avec Δ > 0

Résoudre $2x^2 - 3x - 2 = 0$ à l'aide du discriminant.

Exercice 6 – Racine double

Résoudre $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Exercice 7 – Pas de racine réelle

L'équation $x^2 + x + 3 = 0$ a-t-elle des solutions réelles ?

Exercice 8 – Coefficients irrationnels

Résoudre $x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 2 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Racines avec un discriminant non carré

Résoudre $x^2 - 4x + 1 = 0$ en donnant les valeurs exactes simplifiées.

Exercice 10 – Discriminant nul : trouver un paramètre

Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $x^2 + mx + 4 = 0$ a-t-elle une racine double ?

Exercice 11 – Condition pour deux racines

Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 - 2x + m = 0$ a-t-elle deux racines distinctes ?

Exercice 12 – Condition pour aucune racine

Pour quelles valeurs de m le trinôme $x^2 + 2x + m$ n'a-t-il aucune racine réelle ?

Exercice 13 – Discriminant et signe du trinôme

Montrer que $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout réel x.

Exercice 14 – Construire un trinôme à partir de ses racines

Déterminer le trinôme dont les racines sont -2 et 5 et qui vérifie $f(0) = 20$.

Exercice 15 – Toujours deux racines

Montrer que, pour tout réel m, l'équation $x^2 + mx - 1 = 0$ admet deux solutions distinctes, et que leur produit vaut -1.

Exercice 16 – Type bac : tangente et discriminant

Pour quelle valeur de m la droite $y = x + m$ est-elle tangente à la parabole $y = x^2$? (Indication : tangente $\Leftrightarrow$ une seule intersection.)

Exercice 17 – Type bac : discussion complète

Discuter, selon m, le nombre de solutions de $mx^2 + 2x + 1 = 0$ (attention au cas $m = 0$).

Exercice 18 – Type bac : forme factorisée

Soit $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$. 1) Calculer Δ et les racines. 2) En déduire la forme factorisée de f.

Exercice 19 – Type bac : somme et produit via Δ

Soit $x^2 - 5x + 6 = 0$. 1) Vérifier $\Delta > 0$. 2) Sans résoudre, donner la somme et le produit des racines, puis les racines.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Type bac : droites et parabole, discussion

Selon la valeur du réel m, combien la parabole $y = x^2$ et la droite $d_m : y = mx - 1$ ont-elles de points communs ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Calculer un discriminant

$a = 1$, $b = 3$, $c = -4$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25$.

Réponse. $\Delta = 25$.

Rappel de cours. $\Delta = b^2 - 4ac$. Bien repérer a, b, c avant de calculer.

Correction de l'exercice 2 – Discriminant avec a négatif

$a = -2$, $b = 4$, $c = -1$.

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 16 - 8 = 8$.

Réponse. $\Delta = 8$.

Erreur fréquente. $-4ac = -4 \times (-2) \times (-1)$: trois signes $-$ donnent -8. Surveiller les signes quand a ou c est négatif.

Correction de l'exercice 3 – Nombre de racines

$x^2 + 1$: $\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$ → aucune racine réelle.

$x^2 - 6x + 9$: $\Delta = 36 - 36 = 0$ → une racine double.

$x^2 - x - 2$: $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ → deux racines distinctes.

Réponse. 0 racine ; 1 racine double ; 2 racines.

Rappel de cours. $\Delta > 0$: 2 racines · $\Delta = 0$: 1 racine double · $\Delta < 0$: 0 racine réelle.

Correction de l'exercice 4 – Discriminant avec une fraction

$a = 1$, $b = -1$, $c = \frac{1}{4}$. $\Delta = 1 - 4 \times \frac{1}{4} = 0$.

Racine double : $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$. (On reconnaît $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.)

Réponse. $\Delta = 0$, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Rappel de cours. Si $\Delta = 0$, le trinôme a une racine double $-\frac{b}{2a}$ et s'écrit $a(x - x_0)^2$.

Correction de l'exercice 5 – Racines avec Δ > 0

$a = 2$, $b = -3$, $c = -2$. $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 5$.

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{3 + 5}{4} = 2$.

Réponse. $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

Rappel de cours. $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Ici $-b = -(-3) = 3$.

Correction de l'exercice 6 – Racine double

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 36 - 36 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Racine double : $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$.

Réponse. $x_0 = \dfrac{1}{3}$ (racine double).

Rappel de cours. $\Delta = 0$: racine unique $x_0 = \frac{-b}{2a}$, et $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

Correction de l'exercice 7 – Pas de racine réelle

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 3 = 1 - 12 = -11 < 0$.

$\Delta < 0$: aucune racine réelle, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Réponse. Non, $S = \varnothing$ ($\Delta = -11 < 0$).

Rappel de cours. Quand $\Delta < 0$, le trinôme ne s'annule jamais : il garde le signe de a sur tout $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 8 – Coefficients irrationnels

$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times 2 = 12 - 8 = 4$, donc $\sqrt{\Delta} = 2$.

$x_1 = \dfrac{2\sqrt{3} - 2}{2} = \sqrt{3} - 1$ et $x_2 = \dfrac{2\sqrt{3} + 2}{2} = \sqrt{3} + 1$.

Contrôle : somme $2\sqrt{3} = -\frac{b}{a}$, produit $(\sqrt{3})^2 - 1 = 2 = \frac{c}{a}$.

Réponse. $S = \{\sqrt{3} - 1\,; \sqrt{3} + 1\}$.

Rappel de cours. Somme des racines $-\frac{b}{a}$, produit $\frac{c}{a}$: un contrôle rapide des solutions.

Erreur fréquente. $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$, et non $2 \times 3 = 6$.

Correction de l'exercice 9 – Racines avec un discriminant non carré

$\Delta = 16 - 4 = 12$ et $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Réponse. $S = \{2 - \sqrt{3}\,; 2 + \sqrt{3}\}$.

Rappel de cours. On simplifie $\sqrt{\Delta}$, puis on divise chaque terme du numérateur par $2a$.

Erreur fréquente. $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$, pas $2 + 2\sqrt{3}$: on divise les deux termes.

Correction de l'exercice 10 – Discriminant nul : trouver un paramètre

Racine double $\Leftrightarrow \Delta = 0$. Ici $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 4 = m^2 - 16$.

$m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = 4$ ou $m = -4$.

Réponse. $m = 4$ ou $m = -4$.

Rappel de cours. « Racine double » se traduit toujours par la condition $\Delta = 0$.

Correction de l'exercice 11 – Condition pour deux racines

Deux racines distinctes $\Leftrightarrow \Delta > 0$. $\Delta = (-2)^2 - 4m = 4 - 4m$.

$4 - 4m > 0 \Leftrightarrow 4 > 4m \Leftrightarrow m < 1$.

Réponse. $m < 1$.

Rappel de cours. « Deux racines distinctes » $\Leftrightarrow \Delta > 0$; on résout l'inéquation en le paramètre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Condition pour aucune racine

Aucune racine $\Leftrightarrow \Delta < 0$. $\Delta = 2^2 - 4m = 4 - 4m$.

$4 - 4m < 0 \Leftrightarrow 4 < 4m \Leftrightarrow m > 1$.

Réponse. $m > 1$.

Rappel de cours. $\Delta < 0$: pas de racine. Le trinôme garde alors le signe de a (ici $a = 1 > 0$, donc toujours positif).

Correction de l'exercice 13 – Discriminant et signe du trinôme

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$: le trinôme n'a aucune racine, il ne change donc jamais de signe.

Le signe est celui de $a = 1 > 0$. Donc $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout réel x.

Réponse. $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout x ($\Delta < 0$ et $a > 0$).

Rappel de cours. Trinôme de $\Delta < 0$: signe constant égal à celui de a. Pratique pour prouver une positivité.

Correction de l'exercice 14 – Construire un trinôme à partir de ses racines

Un trinôme de racines -2 et 5 s'écrit $f(x) = a(x + 2)(x - 5)$ avec $a \neq 0$.

$f(0) = a \times 2 \times (-5) = -10a = 20$, donc $a = -2$.

$f(x) = -2(x + 2)(x - 5) = -2(x^2 - 3x - 10) = -2x^2 + 6x + 20$.

Réponse. $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$.

Rappel de cours. Forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Les racines fixent tout sauf a.

Correction de l'exercice 15 – Toujours deux racines

$\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times (-1) = m^2 + 4$.

$m^2 \geq 0$, donc $\Delta \geq 4 > 0$: deux racines distinctes, quel que soit m.

Produit des racines : $\frac{c}{a} = -1$. Les deux racines sont donc de signes contraires.

Réponse. $\Delta = m^2 + 4 > 0$; produit des racines -1.

Rappel de cours. Si a et c sont de signes contraires, $-4ac > 0$ et $\Delta > 0$: deux racines de signes opposés.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : tangente et discriminant

Intersection : $x^2 = x + m$, soit $x^2 - x - m = 0$. Une seule solution $\Leftrightarrow \Delta = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 1 + 4m$.

$1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$.

Réponse. $m = -\frac{1}{4}$.

Rappel de cours. Droite tangente à une parabole $\Leftrightarrow$ le système se réduit à un trinôme de discriminant nul (point de contact unique).

Correction de l'exercice 17 – Type bac : discussion complète

Si $m = 0$: l'équation devient $2x + 1 = 0$, équation du premier degré, une solution $x = -\frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Si $m \neq 0$: $\Delta = 4 - 4m = 4(1 - m)$. $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 1$: 2 solutions. $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$: 1 solution. $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 1$: 0 solution.

Bilan : $m = 0 \to$ 1 sol ; $m < 1$ ($m \neq 0$) $\to$ 2 sol ; $m = 1 \to$ 1 sol ; $m > 1 \to$ 0 sol.

Réponse. $m = 0$: 1 sol ; $0 \neq m < 1$: 2 sol ; $m = 1$: 1 sol ; $m > 1$: 0 sol.

Rappel de cours. Avant d'utiliser Δ, vérifier que $a \neq 0$: si le coefficient de x^2 dépend du paramètre, traiter à part le cas où il s'annule.

Erreur fréquente. Oublier le cas $m = 0$ (où ce n'est plus du second degré) coûte des points au bac.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : forme factorisée

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-12) = 4 + 96 = 100$, $\sqrt{\Delta} = 10$.

$x_1 = \dfrac{2 - 10}{4} = -2$; $x_2 = \dfrac{2 + 10}{4} = 3$.

Forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x + 2)(x - 3)$.

Réponse. $\Delta = 100$, racines -2 et 3, $f(x) = 2(x + 2)(x - 3)$.

Rappel de cours. Avec deux racines : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Ne pas oublier le coefficient a en facteur.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : somme et produit via Δ

$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$: deux racines distinctes.

Somme $S = -\dfrac{b}{a} = 5$; produit $P = \dfrac{c}{a} = 6$.

On cherche deux nombres de somme 5 et produit 6 : ce sont 2 et 3.

Réponse. $S = 5$, $P = 6$; racines 2 et 3.

Rappel de cours. Relations racines/coefficients : $S = -\frac{b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$. Souvent plus rapide que la formule du discriminant.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : droites et parabole, discussion

Points communs : $x^2 = mx - 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0$. $\Delta = m^2 - 4$.

$\Delta = (m - 2)(m + 2)$: c'est un trinôme en m, positif à l'extérieur de -2 et 2.

Si $-2 < m < 2$: $\Delta < 0$, aucun point commun.

Si $m = 2$ ou $m = -2$: $\Delta = 0$, un seul point commun (la droite est tangente à la parabole, en $x = 1$ ou $x = -1$).

Si $m < -2$ ou $m > 2$: $\Delta > 0$, deux points communs.

Réponse. 0 point pour $|m| < 2$, 1 pour $m = \pm 2$, 2 pour $|m| > 2$.

Rappel de cours. Le nombre de points d'intersection est le nombre de solutions de $f(x) = g(x)$, donné par le signe de Δ.

Erreur fréquente. Δ dépend de m : on étudie son signe comme celui d'une nouvelle fonction de m.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).