Fonction dérivée — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La fonction dérivée f' associe à chaque x le nombre dérivé $f'(x)$. On la calcule avec les dérivées de référence et les règles d'opérations : somme, produit par un réel, produit uv, quotient $\frac{u}{v}$, et $(ax+b)^n$. Ces exercices corrigés couvrent toutes ces formules, avec une lecture graphique du signe de f'. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/fonction-derivee

Exercice 1 – Dérivée d'un polynôme

Dériver $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$.

Exercice 2 – Dérivée avec inverse et racine

Dériver $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 3 – Produit par un réel

Dériver $f(x) = 3\sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{5}{x}$.

Exercice 4 – Puissances et coefficients

Dériver $f(x) = x^5 - 3x^4 + \frac{x}{2} - 1$.

Exercice 5 – Polynôme et inverse

Dériver $g(x) = 2x^2 - \frac{3}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 6 – Dérivée d'un produit

Dériver $f(x) = (x^2+1)(3x-2)$.

Exercice 7 – Dérivée d'un quotient

Dériver $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ sur $]3;+\infty[$.

Exercice 8 – Dérivée de 1/v

Dériver $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Racine d'une expression affine

Dériver $f(x) = \sqrt{3x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Exercice 10 – Produit avec une racine

Dériver $f(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ et simplifier.

Exercice 11 – Dérivée de (ax+b)ⁿ

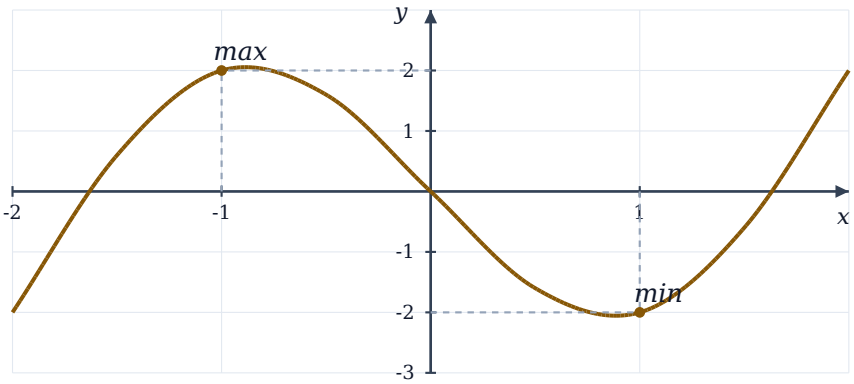
Dériver $f(x) = (2x-1)^3$.

Exercice 12 – Combinaison de règles

Dériver $f(x) = x^2\sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$ (produit).

Exercice 13 – Lecture graphique du signe de f′

On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f. Par lecture graphique, déterminer le signe de $f'(x)$ selon x, et les abscisses où $f'(x) = 0$.



Exercice 14 – Dérivée et factorisation

Dériver $f(x) = x^3 - 3x^2$ et factoriser $f'(x)$.

Exercice 15 – Dériver puis étudier le signe

Soit $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

Exercice 16 – Type bac : quotient à simplifier

Dériver $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ sur $]-1;+\infty[$ et factoriser le numérateur de f'.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Type bac : produit avec une racine carrée

Dériver $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ et donner le signe de $f'(x)$.

Exercice 18 – Type bac : montrer une expression de f′

Soit $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$.

Exercice 19 – Type bac : dérivée d'un inverse

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ et en déduire le maximum de f.

Exercice 20 – Type bac : minimum d'un quotient

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.

2. En déduire les variations de f et son minimum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Dérivée d'un polynôme

On dérive terme à terme avec $(x^n)' = nx^{n-1}$.

$(4x^3)' = 12x^2$, $(-2x^2)' = -4x$, $(5x)' = 5$, $(-7)' = 0$.

$f'(x) = 12x^2 - 4x + 5$.

Réponse. $f'(x) = 12x^2 - 4x + 5$.

Rappel de cours. $(x^n)' = nx^{n-1}$; la dérivée d'une constante est nulle ; on dérive terme à terme.

Correction de l'exercice 2 – Dérivée avec inverse et racine

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ et $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Réponse. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Rappel de cours. Dérivées de référence : $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Correction de l'exercice 3 – Produit par un réel

$f'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$.

$g(x) = 5 \times \frac{1}{x}$, donc $g'(x) = 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{5}{x^2}$.

Réponse. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$; $g'(x) = -\frac{5}{x^2}$.

Rappel de cours. $(k\,u)' = k\,u'$: un coefficient constant se conserve dans la dérivée.

Correction de l'exercice 4 – Puissances et coefficients

On dérive terme à terme avec $(x^n)' = nx^{n-1}$.

$(x^5)' = 5x^4$, $(-3x^4)' = -12x^3$, $\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}$, $(-1)' = 0$.

Réponse. $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + \frac{1}{2}$.

Rappel de cours. $(ku)' = ku'$ et $(u+v)' = u' + v'$; la dérivée d'une constante est nulle.

Correction de l'exercice 5 – Polynôme et inverse

$(2x^2)' = 4x$.

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, donc $\left(-\frac{3}{x}\right)' = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2}$.

Réponse. $g'(x) = 4x + \frac{3}{x^2}$.

Rappel de cours. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Deux signes moins : $-3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ est positif.

Correction de l'exercice 6 – Dérivée d'un produit

Produit $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u = x^2 + 1$ ($u' = 2x$), $v = 3x - 2$ ($v' = 3$).

$f'(x) = 2x(3x - 2) + (x^2 + 1) \times 3 = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3$.

Réponse. $f'(x) = 9x^2 - 4x + 3$.

Rappel de cours. $(uv)' = u'v + uv'$. Développer et réduire pour finir.

Erreur fréquente. $(uv)' \neq u'v'$: il y a deux termes. Oublier l'un d'eux est l'erreur classique.

Correction de l'exercice 7 – Dérivée d'un quotient

Quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = 2x + 1$ ($u' = 2$), $v = x - 3$ ($v' = 1$).

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x+1) \times 1}{(x-3)^2} = \frac{2x - 6 - 2x - 1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}.$$

Réponse. $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-3)^2}$.

Rappel de cours. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Attention à l'ordre : $u'v$ MOINS uv'.

Correction de l'exercice 8 – Dérivée de 1/v

Formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ avec $v = x^2 + 1$, $v' = 2x$.

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Réponse. $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Rappel de cours. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$. Cas particulier du quotient avec $u = 1$.

Correction de l'exercice 9 – Racine d'une expression affine

$f(x) = g(3x + 1)$ avec $g(X) = \sqrt{X}$, $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$.

Règle : $(g(ax + b))' = a\, g'(ax + b)$, avec $a = 3$.

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

Réponse. $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

Rappel de cours. $(g(ax + b))' = a\, g'(ax + b)$: ne pas oublier le facteur a.

Correction de l'exercice 10 – Produit avec une racine

Produit uv avec $u = x$, $v = \sqrt{x}$, $u' = 1$, $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$, car $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Rappel de cours. $(uv)' = u'v + uv'$.

Erreur fréquente. La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées ($1 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ serait faux).

Correction de l'exercice 11 – Dérivée de (ax+b)ⁿ

Formule $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ avec $u = 2x - 1$, $u' = 2$, $n = 3$.

$f'(x) = 3 \times 2 \times (2x-1)^2 = 6(2x-1)^2$.

Réponse. $f'(x) = 6(2x-1)^2$.

Rappel de cours. $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$: on multiplie par la dérivée de l'intérieur u'.

Correction de l'exercice 12 – Combinaison de règles

Produit $u = x^2$ ($u' = 2x$), $v = \sqrt{x}$ ($v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$).

$f'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$.

(On peut simplifier : $\frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{2}$, d'où $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$.)

Réponse. $f'(x) = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$.

Rappel de cours. On applique la règle du produit, puis on simplifie. $\frac{x^2}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$.

Correction de l'exercice 13 – Lecture graphique du signe de f′

Là où la courbe monte, f est croissante, donc $f'(x) > 0$; là où elle descend, $f'(x) < 0$.

La courbe monte sur $]-2;-1[$, descend sur $]-1;1[$, remonte sur $]1;2[$.

Donc $f'(x) > 0$ sur $]-2;-1[\cup]1;2[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-1;1[$.

Aux sommets (max en $x = -1$, min en $x = 1$), la tangente est horizontale : $f'(-1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

Réponse. $f' > 0$ sur $]-2;-1[\cup]1;2[$, $f' < 0$ sur $]-1;1[$; $f'(-1) = f'(1) = 0$.

Rappel de cours. Le signe de f' traduit les variations de f : croissante $\Rightarrow f' > 0$, décroissante $\Rightarrow f' < 0$, extremum $\Rightarrow f' = 0$.

Correction de l'exercice 14 – Dérivée et factorisation

$f'(x) = 3x^2 - 6x$.

On factorise par $3x$: $f'(x) = 3x(x-2)$.

Réponse. $f'(x) = 3x(x-2)$.

Rappel de cours. Factoriser f' prépare l'étude de son signe (et donc des variations de f).

Correction de l'exercice 15 – Dériver puis étudier le signe

Quotient avec $u = x$, $v = x^2 + 1$ (jamais nul), $u' = 1$, $v' = 2x$.

$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$.

Le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$, positif

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

sur $]-1\,;1[$, négatif ailleurs.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, positive sur $]-1\,;1[$, négative sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

Rappel de cours. Après dérivation d'un quotient, le dénominateur au carré est positif : seul le numérateur décide du signe.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : quotient à simplifier

$u = x^2$ ($u' = 2x$), $v = x+1$ ($v' = 1$). $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2}$.

Numérateur : $2x^2 + 2x - x^2 = x^2 + 2x = x(x+2)$.

$f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Rappel de cours. Après la règle du quotient, on développe et on factorise le numérateur : son signe donnera les variations.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : produit avec une racine carrée

Produit uv avec $u = x+1$ ($u' = 1$) et $v = \sqrt{x}$ ($v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$).

$f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x + x + 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}}$.

Pour $x > 0$, numérateur et dénominateur sont positifs : $f'(x) > 0$.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{3x+1}{2\sqrt{x}} > 0$.

Rappel de cours. $(uv)' = u'v + uv'$ et $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; on réduit au même dénominateur en utilisant $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : montrer une expression de f′

$u = x-1$ ($u' = 1$), $v = x^2+1$ ($v' = 2x$). $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2+1) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$.

Numérateur : $x^2 + 1 - (2x^2 - 2x) = x^2 + 1 - 2x^2 + 2x = -x^2 + 2x + 1$.

Donc $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$, comme demandé.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$.

Rappel de cours. « Montrer que $f'(x) = \ldots$ » : appliquer la règle du quotient et développer soigneusement le numérateur.

Erreur fréquente. Bien distribuer le signe $-$ devant $(x-1) \times 2x$: $-(2x^2 - 2x) = -2x^2 + 2x$.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : dérivée d'un inverse

Formule $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v = x^2+1$, $v' = 2x$: $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

$f'(x)$ a le signe de $-x$: f croît sur $]-\infty\,;0]$ et décroît sur $[0\,;+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Maximum en 0 : $f(0) = 1$.

Réponse. $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$; maximum 1 en 0.

Rappel de cours. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$, valable là où v ne s'annule pas.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : minimum d'un quotient

1) $u = x^2+3$, $v = x-1$: $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Et $(x-3)(x+1) = x^2+x-3x-3 = x^2-2x-3$.

2) Sur $]1\,;+\infty[$, $x+1>0$ et $(x-1)^2>0$: $f'(x)$ a le signe de $x-3$.

f est décroissante sur $]1\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$. Minimum : $f(3) = \dfrac{12}{2} = 6$.

Réponse. f décroît puis croît ; minimum 6 atteint en $x = 3$.

Rappel de cours. Factoriser la dérivée permet de lire directement son signe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).