

Fonction exponentielle — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et valant 1 en 0. Elle transforme les sommes en produits, $e^{x+y} = e^x e^y$, elle est strictement positive et strictement croissante. Ces 20 exercices corrigés de Première spécialité couvrent tout le chapitre : simplifier, résoudre des équations et des inéquations, dériver $t \mapsto e^{at}$, étudier des fonctions comme $(x-1)e^x$, relier l'exponentielle aux suites géométriques et à la méthode d'Euler, et modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/fonction-exponentielle

Exercice 1 - Écrire sous la forme e^a

Écris chaque nombre sous la forme e^a .

1. $e^2 \times e^5$

2. $\frac{e^4}{e^{-1}}$

3. $(e^{-2})^3$

Exercice 2 - Simplifier avec x

Pour tout réel x , simplifie $A = e^{3x} \times e^{1-x}$ et $B = \frac{e^{2x+1}}{e^{x-2}}$.

Exercice 3 - Développer

Pour tout réel x , développe $(e^x + 2)^2$ et $(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$.

Exercice 4 - Équations simples

Résous dans $\mathbb{R}$: $e^{2x-3} = e^{x+1}$, puis $e^{4x} = 1$, puis $e^x = -5$.

Exercice 5 - Inéquations

Résous dans $\mathbb{R}$: $e^{1-x} \geq e^3$ et $e^{2x} < e$.

Exercice 6 - Exposant du second degré

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2} = e^{5x-6}$.

Exercice 7 - Factoriser pour résoudre

Résous dans $\mathbb{R}$: $xe^x - 3e^x = 0$, puis $(x - 3)e^x < 0$.

Exercice 8 - Dérivées

Calcule la dérivée de $f(x) = 4e^x - x^3$, de $g(t) = 6e^{-0,5t}$ et de $h(x) = xe^x$.

Exercice 9 - Dérivée d'un quotient

Calcule la dérivée de $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ et étudie son signe.

Exercice 10 - Étude d'une fonction

Soit $f(x) = (x + 2)e^x$ sur $\mathbb{R}$. Étudie ses variations et donne son minimum.

Exercice 11 - Un maximum avec e^{-x}

Soit $f(x) = 2xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Montre que $f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$ et donne le maximum de f .

Exercice 12 - Équation de tangente

Détermine l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = xe^x$ au point d'abscisse 1.

Exercice 13 - Une inégalité célèbre

Démontre que pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$, en étudiant $g(x) = e^x - 1 - x$.

Exercice 14 - Suite géométrique

Soit $u_n = 5e^{-0,5n}$ pour $n \geq 0$. Montre que (u_n) est géométrique, donne sa raison et son sens de variation.

Exercice 15 - Somme de termes

Calcule la valeur exacte puis une valeur approchée de $S = 1 + e + e^2 + e^3 + e^4$.

Exercice 16 - Méthode d'Euler

On approche la fonction exponentielle par la méthode d'Euler avec le pas $h = 0,25$, à partir de $f(0) = 1$. Donne l'approximation obtenue pour $f(1)$ et compare-la à e .

Exercice 17 - Décroissance radioactive

Un échantillon contient $N(t) = 600e^{-0,1t}$ milliards de noyaux radioactifs après t années.

1. Calcule $N(5)$ et $N(10)$ à l'unité.
2. Montre que N est décroissante.
3. Encadre la demi-vie par deux entiers.

Exercice 18 - Capital placé

On place 300 € « en continu » au taux de 5 % : le capital vaut $C(t) = 300 e^{0,05t}$ après t années. Calcule $C(10)$ et compare avec un placement à intérêts composés annuels, $300 \times 1,05^{10}$.

Exercice 19 - Concentration maximale

La concentration d'un médicament (en mg/L) est $C(t) = 9te^{-t}$ pour $t \geq 0$ (en heures). Quand est-elle maximale, et que vaut ce maximum ?

Exercice 20 - Refroidissement

La température d'une boisson (en °C) est $T(t) = 4 + 18e^{-0,2t}$, où t est en minutes après sa mise au réfrigérateur.

1. Calcule $T(0)$ et étudie les variations de T .
2. Au bout de combien de minutes entières la boisson est-elle sous 10 °C ?

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Écrire sous la forme e^a

Les règles sont celles des puissances : $e^a e^b = e^{a+b}$, $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $(e^a)^n = e^{na}$.

$$e^2 \times e^5 = e^7.$$

$$\frac{e^4}{e^{-1}} = e^{4-(-1)} = e^5.$$

$$(e^{-2})^3 = e^{-6}.$$

Réponse. $e^7 \cdot e^5 \cdot e^{-6}$.

Correction de l'exercice 2 - Simplifier avec x

$$A = e^{3x+1-x} = e^{2x+1}.$$

$$B = e^{(2x+1)-(x-2)} = e^{x+3}.$$

Attention aux parenthèses : $-(x-2) = -x+2$.

Réponse. $A = e^{2x+1}$; $B = e^{x+3}$.

Erreur fréquente. $e^a \times e^b \neq e^{ab}$: on additionne les exposants.

Correction de l'exercice 3 - Développer

$$(e^x + 2)^2 = e^{2x} + 4e^x + 4, \text{ car } (e^x)^2 = e^{2x}.$$

$$(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) = (e^x)^2 - (e^{-x})^2 = e^{2x} - e^{-2x}.$$

Réponse. $e^{2x} + 4e^x + 4 \cdot e^{2x} - e^{-2x}$.

Correction de l'exercice 4 - Équations simples

L'exponentielle est strictement croissante : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

$$2x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$e^{4x} = e^0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$e^x > 0$ pour tout x : $e^x = -5$ n'a pas de solution.

Réponse. $S = \{4\} \cdot S = \{0\} \cdot S = \emptyset$.

Correction de l'exercice 5 - Inéquations

L'exponentielle conserve l'ordre : $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

$$1 - x \geq 3 \Leftrightarrow -x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2 : S =]-\infty ; -2].$$

$$e^{2x} < e^1 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} : S = \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[.$$

Réponse. $] -\infty ; -2] \cdot \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right[.$

Correction de l'exercice 6 - Exposant du second degré

$$e^{x^2} = e^{5x-6} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0.$$

$\Delta = 25 - 24 = 1$, racines $\frac{5 \pm 1}{2}$, soit 2 et 3.

Contrôle : $x = 2$ donne e^4 des deux côtés ; $x = 3$ donne e^9 .

Réponse. $S = \{2; 3\}$.

Correction de l'exercice 7 - Factoriser pour résoudre

On factorise : $xe^x - 3e^x = (x - 3)e^x$.

Comme $e^x > 0$, le produit est nul si et seulement si $x - 3 = 0$, soit $x = 3$.

Le produit a le signe de $x - 3$: $(x - 3)e^x < 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Réponse. $S = \{3\}$ · $S =]-\infty; 3[$.

Correction de l'exercice 8 - Dérivées

$f(x) = 4e^x - 3x^2$.

Avec $(e^{at})' = a e^{at}$: $g'(t) = 6 \times (-0,5) e^{-0,5t} = -3e^{-0,5t}$.

Produit : $h'(x) = 1 \times e^x + xe^x = (x + 1)e^x$.

Réponse. $4e^x - 3x^2 \cdot -3e^{-0,5t} \cdot (x + 1)e^x$.

Erreur fréquente. Oublier le facteur a en dérivant e^{at} .

Correction de l'exercice 9 - Dérivée d'un quotient

Formule du quotient avec $u = e^x$, $v = x^2 + 1$, $v' = 2x$:

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - e^x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1)e^x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Or $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$, $e^x > 0$ et $(x^2 + 1)^2 > 0$.

Donc $f'(x) \geq 0$, nul seulement en $x = 1$: f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Réponse. $f'(x) = \frac{(x - 1)^2 e^x}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$.

Correction de l'exercice 10 - Étude d'une fonction

Produit : $f(x) = e^x + (x + 2)e^x = (x + 3)e^x$.

$e^x > 0$: $f(x)$ a le signe de $x + 3$, négatif pour $x < -3$, positif pour $x > -3$.

f est décroissante sur $]-\infty; -3]$ et croissante sur $[-3; +\infty[$.

Minimum : $f(-3) = (-3 + 2)e^{-3} = -e^{-3} \approx -0,050$.

Réponse. Minimum $-e^{-3} \approx -0,05$ en $x = -3$.

Correction de l'exercice 11 - Un maximum avec e^{-x}

Produit de $u = 2x$ et $v = e^{-x}$, avec $v' = -e^{-x}$: $f'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} = 2(1 - x)e^{-x}$.

$e^{-x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $1 - x$; f croît sur $]-\infty; 1]$ puis décroît.

Maximum : $f(1) = 2e^{-1} \approx 0,736$.

Réponse. Maximum $2e^{-1} \approx 0,736$ en $x = 1$.

Correction de l'exercice 12 - Équation de tangente

$f(x) = (x + 1)e^x$, donc $f(1) = e$ et $f'(1) = 2e$.

Tangente : $y = f(1)(x - 1) + f(1) = 2e(x - 1) + e = 2ex - e$.

Réponse. $y = 2ex - e$.

Rappel de cours. Tangente en a : $y = f(a)(x - a) + f(a)$.

Correction de l'exercice 13 - Une inégalité célèbre

$g'(x) = e^x - 1$, positif si et seulement si $e^x \geq e^0$, c'est-à-dire $x \geq 0$.

g est décroissante sur $]-\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$: son minimum est $g(0) = 0$.

Donc $g(x) \geq 0$ pour tout x , soit $e^x \geq 1 + x$.

Graphiquement, la courbe de l'exponentielle est au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = x + 1$.

Réponse. g a pour minimum 0 : $e^x \geq 1 + x$.

Correction de l'exercice 14 - Suite géométrique

$$u_{n+1} = 5e^{-0,5n-0,5} = 5e^{-0,5n} \times e^{-0,5} = e^{-0,5} u_n.$$

La suite est géométrique de raison $q = e^{-0,5} \approx 0,607$ et de premier terme $u_0 = 5$.

$0 < q < 1$ et $u_0 > 0$: la suite est strictement décroissante.

Réponse. Raison $e^{-0,5} \approx 0,607$, décroissante.

Correction de l'exercice 15 - Somme de termes

C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q = e \neq 1$:

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

$$\text{Avec } n = 4 : S = \frac{e^5 - 1}{e - 1}.$$

À la calculatrice, $S \approx 85,79$.

Réponse. $S = \frac{e^5 - 1}{e - 1} \approx 85,79$.

Correction de l'exercice 16 - Méthode d'Euler

Comme $f' = f$, l'approximation affine donne $f(x + h) \approx (1 + h)f(x)$: chaque pas multiplie par 1,25.

Quatre pas mènent de 0 à 1 : $f(1) \approx 1,25^4 \approx 2,441$.

La valeur exacte est $e \approx 2,718$: l'erreur est d'environ 0,28. Un pas plus petit améliore la précision.

Réponse. $1,25^4 \approx 2,441$ (pour $e \approx 2,718$).

Correction de l'exercice 17 - Décroissance radioactive

$$N(5) = 600 e^{-0,5} \approx 364 ; N(10) = 600 e^{-1} \approx 221.$$

$$N'(t) = 600 \times (-0,1) e^{-0,1t} = -60 e^{-0,1t} < 0 : N \text{ est strictement décroissante.}$$

$$\text{On cherche quand } N(t) = 300 : N(6) = 600 e^{-0,6} \approx 329 \text{ et } N(7) = 600 e^{-0,7} \approx 298.$$

La demi-vie est comprise entre 6 et 7 ans.

Réponse. 364 ; 221 ; demi-vie entre 6 et 7 ans.

Correction de l'exercice 18 - Capital placé

$$C(10) = 300 e^{0,5} \approx 494,62 \text{ €}.$$

$$\text{Placement annuel : } 300 \times 1,05^{10} \approx 488,67 \text{ €}.$$

Le placement continu rapporte un peu plus : chaque année il multiplie le capital par $e^{0,05} \approx 1,0513$, un peu plus que 1,05.

Réponse. $\approx 494,62 \text{ €}$ contre $\approx 488,67 \text{ €}$.

Correction de l'exercice 19 - Concentration maximale

$$\text{Produit : } C'(t) = 9e^{-t} + 9t \times (-e^{-t}) = 9(1 - t)e^{-t}.$$

$e^{-t} > 0$: $C'(t)$ a le signe de $1 - t$, positif avant 1, négatif après.

La concentration est maximale au bout d'une heure : $C(1) = 9e^{-1} \approx 3,31 \text{ mg/L}$.

Réponse. Au bout d'une heure ; $9e^{-1} \approx 3,31 \text{ mg/L}$.

Correction de l'exercice 20 - Refroidissement

$T(0) = 4 + 18 = 22 \text{ °C}$. $T'(t) = 18 \times (-0,2) e^{-0,2t} = -3,6 e^{-0,2t} < 0$: T est strictement décroissante.

À la calculatrice : $T(5) = 4 + 18 e^{-1} \approx 10,6 \text{ °C}$ et $T(6) = 4 + 18 e^{-1,2} \approx 9,4 \text{ °C}$.

La boisson passe sous 10 °C au bout de 6 minutes.

Réponse. 22 °C , décroissante ; 6 minutes.