Forme canonique — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La forme canonique d'un trinôme s'écrit $a(x-\alpha)^2+\beta$, où (α,β) est le sommet de la parabole : $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$. Elle révèle immédiatement l'extremum et l'axe de symétrie. Ces exercices corrigés couvrent le passage à la forme canonique, la lecture du sommet, les extremums et l'optimisation. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/forme-canonique

Exercice 1 – Forme canonique simple

Mettre $f(x)=x^2-4x+1$ sous forme canonique.

Exercice 2 – Identifier le sommet

La forme canonique de f est $f(x)=2(x-3)^2+5$. Donner le sommet de la parabole.

Exercice 3 – Minimum ou maximum ?

Pour $f(x)=-(x-1)^2+4$, dire si le sommet est un minimum ou un maximum, et donner sa valeur.

Exercice 4 – Lire le sommet et l'extremum

Soit $f(x)=-3(x+2)^2+7$. Donner α, β, le sommet de la parabole et la nature de l'extremum.

Exercice 5 – Forme canonique avec a ≠ 1

Mettre $f(x)=2x^2-8x+3$ sous forme canonique.

Exercice 6 – Vérifier par développement

Vérifier que $(x-2)^2-3=x^2-4x+1$.

Exercice 7 – Axe de symétrie

Donner l'axe de symétrie de la parabole de $f(x)=x^2+6x+2$.

Exercice 8 – Coefficient b impair

Mettre $f(x)=x^2+3x+1$ sous forme canonique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Coefficient a négatif

Mettre $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ sous forme canonique et en déduire son maximum.

Exercice 10 – Résoudre via la forme canonique

En utilisant la forme canonique $f(x) = (x-2)^2 - 3$, résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 11 – Tableau de variations

Soit $f(x) = (x+1)^2 - 4$. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 12 – Forme canonique et signe

Montrer, à l'aide de la forme canonique, que $f(x) = x^2 - 2x + 5$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 – Retrouver un trinôme depuis son sommet

Une parabole a pour sommet $(2\,;-1)$ et passe par $(0\,;3)$. Déterminer l'expression $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Exercice 14 – Utiliser les formules de α et β

Écrire $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$ sous forme canonique à l'aide de $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Exercice 15 – Symétrie et comparaison d'images

Soit $f(x) = 2(x-2{,}5)^2 + 1$. Sans calculer, comparer $f(-1)$ et $f(6)$, puis $f(0)$ et $f(4)$.

Exercice 16 – Type bac : optimisation d'une aire

On dispose de 40 m de clôture pour un enclos rectangulaire. Largeur x, l'aire est $A(x) = x(20-x)$. 1) Mettre A sous forme canonique. 2) En déduire l'aire maximale.

Exercice 17 – Type bac : trajectoire

La hauteur d'un ballon est $h(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 1{,}5$ (en m), x distance horizontale. Déterminer la hauteur maximale et la distance où elle est atteinte.

Exercice 18 – Type bac : encadrement

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 11$. 1) Forme canonique. 2) En déduire que $f(x) \geq 2$ pour tout x, et préciser quand il y a égalité.

Exercice 19 – Type bac : forme canonique et translations

La courbe de g s'obtient en translatant la parabole $y = x^2$ de 3 vers la droite et 2 vers le bas. Donner g sous forme canonique puis développée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Type bac : fixer un prix

Un club vend des places de concert. S'il fixe le prix à p euros ($0 \leq p \leq 50$), il vend $200 - 4p$ places.

1. Exprimer la recette $R(p)$.

2. Écrire $R(p)$ sous forme canonique.

3. Quel prix maximise la recette ? Combien de places sont alors vendues ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Forme canonique simple

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $\beta = f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$.

$f(x) = (x-2)^2 - 3$.

Réponse. $f(x) = (x-2)^2 - 3$.

Rappel de cours. Forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Correction de l'exercice 2 – Identifier le sommet

Dans $a(x-\alpha)^2 + \beta$, le sommet est $(\alpha\,;\beta)$.

Ici $\alpha = 3$ et $\beta = 5$, donc le sommet est $(3\,;5)$.

Réponse. Sommet $(3\,;5)$.

Rappel de cours. La forme canonique donne le sommet directement : $S(\alpha;\beta)$. Attention au signe : $(x-3)$ donne $\alpha = 3$.

Correction de l'exercice 3 – Minimum ou maximum ?

$a = -1 < 0$: la parabole est tournée vers le bas, le sommet est un maximum.

Sommet $(1\,;4)$: le maximum de f est 4, atteint en $x = 1$.

Réponse. Maximum $f(1) = 4$ (car $a < 0$).

Rappel de cours. $a > 0$: sommet = minimum (parabole vers le haut). $a < 0$: sommet = maximum.

Correction de l'exercice 4 – Lire le sommet et l'extremum

La forme canonique est $a(x-\alpha)^2 + \beta$. Ici $x + 2 = x - (-2)$, donc $\alpha = -2$ et $\beta = 7$.

Sommet $S(-2\,;7)$. Comme $a = -3 < 0$, la parabole est tournée vers le bas : 7 est un maximum, atteint en $x = -2$.

Réponse. $S(-2\,;7)$; maximum 7 en $x = -2$.

Rappel de cours. $a > 0$: minimum β. $a < 0$: maximum β.

Erreur fréquente. $(x+2)^2$ correspond à $\alpha = -2$, pas à 2.

Correction de l'exercice 5 – Forme canonique avec a ≠ 1

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{8}{4} = 2$ et $\beta = f(2) = 2 \times 4 - 16 + 3 = 8 - 16 + 3 = -5$.

$f(x) = 2(x-2)^2 - 5$.

Réponse. $f(x) = 2(x-2)^2 - 5$.

Rappel de cours. Le coefficient a se conserve : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Vérifier en développant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Vérifier par développement

$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ (identité remarquable).

$(x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 4 - 3 = x^2 - 4x + 1$. ✓

Réponse. $(x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$, vérifié.

Rappel de cours. $(x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$. Développer la forme canonique permet de contrôler son calcul.

Correction de l'exercice 7 – Axe de symétrie

L'axe de symétrie est la droite verticale $x = \alpha$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$.

$\alpha = \dfrac{-6}{2} = -3$, donc l'axe de symétrie est $x = -3$.

Réponse. Axe de symétrie : $x = -3$.

Rappel de cours. L'axe de symétrie de la parabole passe par le sommet : c'est la droite $x = \alpha$.

Correction de l'exercice 8 – Coefficient b impair

On reconnaît le début de $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$.

Donc $x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

$f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

Réponse. $f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

Rappel de cours. $x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$.

Correction de l'exercice 9 – Coefficient a négatif

On factorise par $a = -1$ les deux premiers termes : $f(x) = -(x^2 - 4x) + 1$.

$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$, donc $f(x) = -[(x-2)^2 - 4] + 1 = -(x-2)^2 + 5$.

$-(x-2)^2 \leq 0$, donc $f(x) \leq 5$, avec égalité pour $x = 2$.

Réponse. $f(x) = -(x-2)^2 + 5$; maximum 5 en $x = 2$.

Rappel de cours. Quand $a \neq 1$, on factorise d'abord par a les termes en x^2 et en x.

Erreur fréquente. En distribuant le signe moins : $-(-4) = +4$, d'où +5 et non −3.

Correction de l'exercice 10 – Résoudre via la forme canonique

$(x-2)^2 - 3 = 0$, soit $(x-2)^2 = 3$.

$x - 2 = \pm\sqrt{3}$, donc $x = 2 - \sqrt{3}$ ou $x = 2 + \sqrt{3}$.

Réponse. $x = 2 - \sqrt{3}$ ou $x = 2 + \sqrt{3}$.

Rappel de cours. La forme canonique permet de résoudre sans discriminant : isoler le carré, puis $\pm\sqrt{\ }$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Tableau de variations

Sommet $(-1\,;-4)$, $a = 1 > 0$: minimum en $x = -1$.

f est décroissante sur $]-\infty;-1]$ puis croissante sur $[-1;+\infty[$.

Minimum $f(-1) = -4$.

Réponse. Décroissante puis croissante ; minimum $f(-1) = -4$.

Rappel de cours. La forme canonique donne directement le tableau : décroît jusqu'à α, puis croît (si $a > 0$).

Correction de l'exercice 12 – Forme canonique et signe

$\alpha = 1$, $\beta = f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$, donc $f(x) = (x-1)^2 + 4$.

$(x-1)^2 \geq 0$, donc $f(x) = (x-1)^2 + 4 \geq 4 > 0$.

f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Réponse. $f(x) = (x-1)^2 + 4 \geq 4 > 0$: strictement positive.

Rappel de cours. La forme canonique $(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\beta > 0$ prouve immédiatement la positivité (somme d'un carré et d'un positif).

Correction de l'exercice 13 – Retrouver un trinôme depuis son sommet

Sommet $(2;-1)$: $\alpha = 2$, $\beta = -1$, donc $f(x) = a(x-2)^2 - 1$.

Passe par $(0;3)$: $3 = a(0-2)^2 - 1 = 4a - 1$, donc $4a = 4$ et $a = 1$.

$f(x) = (x-2)^2 - 1$.

Réponse. $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

Rappel de cours. Le sommet donne α, β ; un autre point fournit l'équation permettant de déterminer a.

Correction de l'exercice 14 – Utiliser les formules de α et β

$\alpha = -\dfrac{-12}{2 \times 3} = 2$.

$\beta = f(2) = 12 - 24 + 7 = -5$.

$f(x) = 3(x-2)^2 - 5$. Contrôle : $3(x^2 - 4x + 4) - 5 = 3x^2 - 12x + 7$.

Réponse. $f(x) = 3(x-2)^2 - 5$.

Rappel de cours. Forme canonique : $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Correction de l'exercice 15 – Symétrie et comparaison d'images

La parabole est symétrique par rapport à la droite $x = 2{,}5$: deux nombres situés à la même distance de 2,5 ont la même image.

-1 et 6 sont tous deux à 3,5 de 2,5 : $f(-1) = f(6)$.

0 est à 2,5 de l'axe, 4 à 1,5. Avec $a > 0$, plus on s'éloigne de l'axe, plus l'image est grande : $f(0) > f(4)$.

Vérification : $f(0) = 2 \times 6{,}25 + 1 = 13{,}5$ et $f(4) = 2 \times 2{,}25 + 1 = 5{,}5$.

Réponse. $f(-1) = f(6)$ et $f(0) > f(4)$.

Rappel de cours. L'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = \alpha$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 16 – Type bac : optimisation d'une aire

$A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$. $\alpha = \dfrac{-20}{2 \times (-1)} = 10$, $\beta = A(10) = 10 \times 10 = 100$.

Forme canonique : $A(x) = -(x - 10)^2 + 100$.

$a = -1 < 0$: maximum au sommet, $A(10) = 100$. L'aire maximale est 100 m^2 (carré de côté 10).

Réponse. $A(x) = -(x - 10)^2 + 100$; aire maximale 100 m^2 pour $x = 10$.

Rappel de cours. La forme canonique $-(x - \alpha)^2 + \beta$ montre le maximum β en $x = \alpha$: idéal pour l'optimisation.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : trajectoire

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \times (-0{,}5)} = \dfrac{-2}{-1} = 2$.

$\beta = h(2) = -0{,}5 \times 4 + 2 \times 2 + 1{,}5 = -2 + 4 + 1{,}5 = 3{,}5$.

Hauteur maximale 3,5 m atteinte à $x = 2$ m.

Réponse. Hauteur max 3,5 m à $x = 2$ m.

Rappel de cours. Le sommet $(\alpha ; \beta)$ d'une trajectoire parabolique donne la portée du maximum et sa hauteur.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : encadrement

$\alpha = 3$, $\beta = f(3) = 9 - 18 + 11 = 2$, donc $f(x) = (x - 3)^2 + 2$.

$(x - 3)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq 2$.

Égalité quand $(x - 3)^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$.

Réponse. $f(x) = (x - 3)^2 + 2 \geq 2$, égalité en $x = 3$.

Rappel de cours. Le minimum β de la forme canonique fournit l'inégalité $f(x) \geq \beta$, avec égalité au sommet.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : forme canonique et translations

Translation de 3 vers la droite : on remplace x par $x - 3$. Translation de 2 vers le bas : on retranche 2.

Forme canonique : $g(x) = (x - 3)^2 - 2$.

Développée : $g(x) = x^2 - 6x + 9 - 2 = x^2 - 6x + 7$.

Réponse. $g(x) = (x - 3)^2 - 2 = x^2 - 6x + 7$.

Rappel de cours. Translation horizontale de $+h$: $x \to x - h$. Verticale de $-k$: on soustrait k. La forme canonique reflète ces translations.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : fixer un prix

1) $R(p) = p(200 - 4p) = -4p^2 + 200p$.

2) $R(p) = -4(p^2 - 50p) = -4[(p - 25)^2 - 625] = -4(p - 25)^2 + 2\,500$.

3) $-4(p - 25)^2 \leq 0$, donc $R(p) \leq 2\,500$, avec égalité pour $p = 25$. Places vendues : $200 - 100 = 100$.

Réponse. Prix optimal 25 € ; recette maximale 2 500 € ; 100 places vendues.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. La forme canonique donne directement l'extremum β et l'endroit α où il est atteint.

Erreur fréquente. Le prix le plus élevé ne donne pas la meilleure recette : on vend alors trop peu de places.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).