Nombre dérivé — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse a. On le définit comme la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand $h \to 0$. Ces exercices corrigés couvrent taux d'accroissement, calcul du nombre dérivé par la limite, lecture graphique et interprétation. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/nombre-derive

Exercice 1 – Taux d'accroissement

Soit $f(x) = x^2$. Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et 5.

Exercice 2 – Taux avec h

Soit $f(x) = x^2$. Exprimer le taux d'accroissement entre 3 et $3 + h$.

Exercice 3 – Taux d'accroissement entre deux valeurs

Soit $f(x) = x^2 - 3x$. Calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et 3, puis l'interpréter graphiquement.

Exercice 4 – Nombre dérivé par la limite

En déduire $f'(3)$ pour $f(x) = x^2$.

Exercice 5 – Nombre dérivé d'une fonction affine

Soit $f(x) = 3x + 2$. Calculer $f'(a)$ pour un réel a quelconque.

Exercice 6 – Lecture graphique d'un nombre dérivé

Sur un graphique, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 passe par $(1\,;2)$ et $(3\,;6)$. Donner $f'(1)$.

Exercice 7 – Signe du nombre dérivé

Sur un graphique, au point d'abscisse a, la tangente « descend » (pente négative). Que peut-on dire de $f'(a)$ et des variations de f autour de a ?

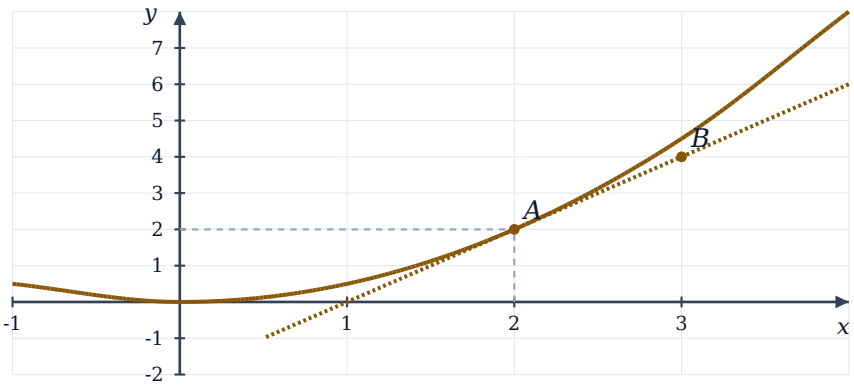
Exercice 8 – Nombre dérivé par la définition

Soit $f(x) = 2x^2 - x$. Calculer $f'(1)$ en revenant à la définition.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Lire un nombre dérivé sur un graphique

On a tracé la courbe de f et sa tangente au point A d'abscisse 2. La tangente passe aussi par le point $B(3\,;4)$. Lire $f(2)$ et $f'(2)$.



Exercice 10 – Nombre dérivé de la fonction inverse

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Calculer $f'(2)$ par la définition.

Exercice 11 – Nombre dérivé de la racine

Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer $f'(4)$ (on utilisera la quantité conjuguée).

Exercice 12 – Tangente horizontale

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Calculer $f'(a)$ en fonction de a (par la limite), puis trouver où la tangente est horizontale.

Exercice 13 – Interprétation : vitesse

Un mobile parcourt $d(t) = t^2$ (en m, t en s). Le nombre dérivé $d'(t)$ est la vitesse instantanée. Sachant $d'(t) = 2t$, calculer la vitesse à $t = 3$ s.

Exercice 14 – Nombre dérivé d'un quotient simple

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$. Calculer $f'(0)$ par la définition.

Exercice 15 – Vitesse moyenne et vitesse instantanée

Un objet lâché sans vitesse initiale parcourt $d(t) = 4{,}9t^2$ mètres en t secondes.

1. Calculer sa vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 3$.

2. Calculer sa vitesse instantanée à $t = 2$, c'est-à-dire $d'(2)$.

Exercice 16 – Type bac : dérivabilité

Soit $f(x) = |x|$. Calculer le taux d'accroissement en 0 à droite ($h > 0$) et à gauche ($h < 0$). f est-elle dérivable en 0 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Type bac : nombre dérivé général

Soit $f(x) = x^3$. Calculer $f'(a)$ par la définition pour un réel a.

Exercice 18 – Type bac : approximation affine

Soit $f(x) = x^2$, avec $f(3) = 9$ et $f'(3) = 6$. Donner une valeur approchée de $f(3{,}01)$ à l'aide de l'approximation affine $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\,h$.

Exercice 19 – Type bac : coût marginal

Le coût de production de q objets est $C(q) = q^2 + 10q$ (en €). Le coût marginal est $C'(q)$. Sachant $C'(q) = 2q + 10$, calculer le coût marginal pour $q = 20$ et l'interpréter.

Exercice 20 – Type bac : la racine carrée en 0

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$. Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Taux d'accroissement

Taux d'accroissement $= \dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}$.

$= \dfrac{25-4}{3} = \dfrac{21}{3} = 7$.

Réponse. Le taux d'accroissement est 7.

Rappel de cours. Taux d'accroissement entre a et b : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. C'est la pente de la corde $[AB]$.

Correction de l'exercice 2 – Taux avec h

$\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{(3+h)^2-9}{h}$.

$(3+h)^2 = 9+6h+h^2$, donc le numérateur vaut $6h+h^2$.

$\dfrac{6h+h^2}{h} = 6+h$ (pour $h \neq 0$).

Réponse. Taux $= 6+h$.

Rappel de cours. On développe $(a+h)^2$, on simplifie par h : le taux devient une expression en h sans division.

Correction de l'exercice 3 – Taux d'accroissement entre deux valeurs

$f(1) = 1-3 = -2$ et $f(3) = 9-9 = 0$.

Taux : $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{0-(-2)}{2} = 1$.

C'est le coefficient directeur de la sécante passant par les points de la courbe d'abscisses 1 et 3.

Réponse. Le taux d'accroissement vaut 1.

Rappel de cours. Taux d'accroissement entre a et b : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Correction de l'exercice 4 – Nombre dérivé par la limite

$f'(3) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h)$.

Quand $h \to 0$, $6+h \to 6$.

Réponse. $f'(3) = 6$.

Rappel de cours. $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. On simplifie le taux, puis on fait $h \to 0$.

Correction de l'exercice 5 – Nombre dérivé d'une fonction affine

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{[3(a+h)+2]-[3a+2]}{h} = \dfrac{3h}{h} = 3$.

La limite quand $h \to 0$ est 3 (constante).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f'(a) = 3$ pour tout a.

Rappel de cours. Une fonction affine $mx + p$ a un nombre dérivé constant égal à sa pente m.

Correction de l'exercice 6 – Lecture graphique d'un nombre dérivé

$f'(1)$ est la pente de la tangente en 1.

Pente $= \dfrac{6-2}{3-1} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Réponse. $f'(1) = 2$.

Rappel de cours. Le nombre dérivé $f'(a)$ se lit comme le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

Correction de l'exercice 7 – Signe du nombre dérivé

Une tangente qui descend a une pente négative, donc $f'(a) < 0$.

Un nombre dérivé négatif indique que f est décroissante autour de a.

Réponse. $f'(a) < 0$: f est décroissante autour de a.

Rappel de cours. $f'(a) > 0$: croissante ; $f'(a) < 0$: décroissante ; $f'(a) = 0$: tangente horizontale (extremum possible).

Correction de l'exercice 8 – Nombre dérivé par la définition

$f(1) = 1$ et $f(1+h) = 2(1+2h+h^2) - (1+h) = 1 + 3h + 2h^2$.

Taux : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{3h+2h^2}{h} = 3 + 2h$ pour $h \neq 0$.

Quand h tend vers 0, $3 + 2h$ tend vers 3. f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

Réponse. $f'(1) = 3$.

Rappel de cours. $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand cette limite existe et est finie.

Erreur fréquente. Simplifier par h avant de faire tendre h vers 0 : on ne remplace jamais h par 0 dans $\frac{\cdots}{h}$.

Correction de l'exercice 9 – Lire un nombre dérivé sur un graphique

A est sur la courbe : on lit $f(2) = 2$.

$f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente en A. Elle passe par $A(2\,;2)$ et $B(3\,;4)$: $f'(2) = \dfrac{4-2}{3-2} = 2$.

Réponse. $f(2) = 2$ et $f'(2) = 2$.

Rappel de cours. Le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Erreur fréquente. Le point B est sur la tangente, pas sur la courbe : $f(3) \neq 4$.

Correction de l'exercice 10 – Nombre dérivé de la fonction inverse

$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h}$.

$\dfrac{1}{2+h} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2-(2+h)}{2(2+h)} = \dfrac{-h}{2(2+h)}$. En divisant par h : $\dfrac{-1}{2(2+h)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Quand $h \to 0$: $\dfrac{-1}{2 \times 2} = -\dfrac{1}{4}$.

Réponse. $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

Rappel de cours. On met les fractions au même dénominateur, on simplifie par h, puis $h \to 0$. On retrouve $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Correction de l'exercice 11 – Nombre dérivé de la racine

$\dfrac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$. On multiplie par la conjuguée $\sqrt{4+h} + 2$.

$= \dfrac{(4+h) - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \dfrac{h}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \dfrac{1}{\sqrt{4+h} + 2}$.

Quand $h \to 0$: $\dfrac{1}{\sqrt{4} + 2} = \dfrac{1}{4}$.

Réponse. $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

Rappel de cours. Pour une racine, la quantité conjuguée fait disparaître la racine au numérateur. On retrouve $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Correction de l'exercice 12 – Tangente horizontale

$\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$: le numérateur est $(a+h)^2 - 4(a+h) + 1 - (a^2 - 4a + 1) = 2ah + h^2 - 4h$.

Divisé par h : $2a + h - 4$. Limite quand $h \to 0$: $f'(a) = 2a - 4$.

Tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Réponse. $f'(a) = 2a - 4$; tangente horizontale en $a = 2$.

Rappel de cours. Tangente horizontale $\Leftrightarrow$ nombre dérivé nul. Ici l'abscisse du sommet de la parabole.

Correction de l'exercice 13 – Interprétation : vitesse

La vitesse instantanée à l'instant t est $d'(t) = 2t$.

À $t = 3$: $d'(3) = 2 \times 3 = 6$ m/s.

Réponse. La vitesse à $t = 3$ s est 6 m/s.

Rappel de cours. Le nombre dérivé d'une position par rapport au temps est la vitesse instantanée. C'est l'interprétation cinématique de $f'(a)$.

Correction de l'exercice 14 – Nombre dérivé d'un quotient simple

$f(0) = 1$ et $f(h) = \dfrac{1}{1+h}$.

$f(h) - f(0) = \dfrac{1}{1+h} - 1 = \dfrac{1 - (1+h)}{1+h} = \dfrac{-h}{1+h}$.

Taux : $\dfrac{-h}{h(1+h)} = \dfrac{-1}{1+h}$, qui tend vers -1 quand $h \to 0$.

Réponse. $f'(0) = -1$.

Rappel de cours. Avec des fractions, on réduit au même dénominateur pour faire apparaître h en facteur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 15 – Vitesse moyenne et vitesse instantanée

1) $\dfrac{d(3)-d(2)}{3-2} = 44{,}1 - 19{,}6 = 24{,}5$ m/s.

2) $\dfrac{d(2+h)-d(2)}{h} = \dfrac{4{,}9(4+4h+h^2)-19{,}6}{h} = \dfrac{19{,}6h+4{,}9h^2}{h} = 19{,}6+4{,}9h.$

Quand $h \to 0$, la limite vaut 19,6. Donc $d'(2) = 19{,}6$ m/s.

Réponse. Vitesse moyenne 24,5 m/s ; vitesse instantanée à $t = 2$: 19,6 m/s.

Rappel de cours. Vitesse moyenne = taux d'accroissement ; vitesse instantanée = nombre dérivé.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : dérivabilité

Pour $h > 0$: $\dfrac{|0+h|-0}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$, limite à droite = 1.

Pour $h < 0$: $\dfrac{|h|}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$, limite à gauche = -1.

Les deux limites diffèrent ($1 \neq -1$) : f n'est pas dérivable en 0 (point anguleux).

Réponse. Limites 1 (droite) et -1 (gauche) : f n'est pas dérivable en 0.

Rappel de cours. Dérivabilité en a : le taux doit avoir UNE limite finie (mêmes valeurs à gauche et à droite). Sinon, point anguleux.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : nombre dérivé général

$(a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$, donc $f(a+h) - f(a) = 3a^2h + 3ah^2 + h^3$.

Divisé par h : $3a^2 + 3ah + h^2$.

Quand $h \to 0$: $f'(a) = 3a^2$.

Réponse. $f'(a) = 3a^2$.

Rappel de cours. On développe $(a+h)^3$, on simplifie par h, puis $h \to 0$. On retrouve $(x^3)' = 3x^2$.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : approximation affine

Approximation affine : $f(3+h) \approx f(3) + f'(3)\,h$, avec $h = 0{,}01$.

$f(3{,}01) \approx 9 + 6 \times 0{,}01 = 9 + 0{,}06 = 9{,}06$.

(Valeur exacte : $3{,}01^2 = 9{,}0601$, l'approximation est excellente.)

Réponse. $f(3{,}01) \approx 9{,}06$.

Rappel de cours. Approximation affine (tangente) : $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h$ pour h petit. La tangente « colle » à la courbe près de a.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : coût marginal

Coût marginal : $C'(20) = 2 \times 20 + 10 = 50$ €.

Interprétation : produire le 21^{e} objet coûte environ 50 € supplémentaires (le coût marginal approche le coût du produit suivant).

Réponse. $C'(20) = 50$ € : le 21^{e} objet coûte environ 50 € de plus.

Rappel de cours. En économie, le nombre dérivé du coût est le coût marginal : coût approximatif d'une unité supplémentaire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 20 – Type bac : la racine carrée en 0

Pour $h > 0$: $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

Quand h tend vers 0 par valeurs positives, $\sqrt{h}$ tend vers 0 et $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient aussi grand qu’on veut (par exemple 100 pour $h = 10^{-4}$) : le taux n’a pas de limite finie.

f n’est donc pas dérivable en 0.

Graphiquement, les sécantes deviennent de plus en plus raides : la courbe admet au point $(0\,;0)$ une tangente verticale.

Réponse. $\curvearrowright$ n’est pas dérivable en 0 ; sa courbe y a une tangente verticale.

Rappel de cours. Une fonction peut être définie en un point sans y être dérivable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).