Probabilités conditionnelles — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La probabilité conditionnelle $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est la probabilité de B une fois que A est réalisé. On l'illustre par un arbre pondéré et on relie le tout par la formule des probabilités totales. Ces exercices corrigés couvrent arbres, probabilités totales, indépendance et tableaux croisés, du plus simple au type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/probabilites-conditionnelles

Exercice 1 – Définition

On donne $P(A) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calculer $P_A(B)$.

Exercice 2 – Probabilité d'une intersection

On donne $P(A) = 0{,}3$ et $P_A(B) = 0{,}6$. Calculer $P(A \cap B)$.

Exercice 3 – Compléter un arbre

Sur un arbre, $P(A) = 0{,}4$. Donner $P(\overline{A})$. Si $P_A(B) = 0{,}7$, donner $P_A(\overline{B})$.

Exercice 4 – Traduire un énoncé

Dans un lycée, 30 % des élèves sont internes (I) et, parmi les internes, 40 % pratiquent un sport en club (S). Traduire ces données et calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit interne et sportif.

Exercice 5 – Tableau croisé

Dans un groupe de 50 personnes, 30 sont des femmes (F), et parmi elles 18 portent des lunettes (L). On choisit une personne au hasard. Calculer $P_F(L)$.

Exercice 6 – Probabilité d'un chemin

Un arbre donne $P(A) = 0{,}6$ et $P_A(B) = 0{,}5$. Calculer la probabilité du chemin A puis B.

Exercice 7 – Probabilités totales (2 branches)

On donne $P(A) = 0{,}4$, $P_A(B) = 0{,}7$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}3$. Calculer $P(B)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Tableau croisé dans les deux sens

Sur 200 élèves, 90 sont des filles (F) ; 120 élèves regardent une série (S), dont 60 filles. On choisit un élève au hasard. Calculer $P_F(S)$ et $P_S(F)$.

Exercice 9 – Probabilité de l'événement contraire par l'arbre

On donne $P(A) = 0{,}7$, $P_A(B) = 0{,}2$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}6$. Calculer $P(B)$ et $P(\overline{B})$.

Exercice 10 – Tester l'indépendance

On donne $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 11 – Probabilité conditionnelle inversée

On donne $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calculer $P_B(A)$.

Exercice 12 – Arbre complet

Une usine a deux machines : M1 (60% de la production, 3% de défauts) et M2 (40%, 5% de défauts). Calculer la probabilité D qu'une pièce soit défectueuse.

Exercice 13 – Indépendance et réunion

A et B sont indépendants avec $P(A) = 0{,}2$ et $P(B) = 0{,}6$. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 14 – Indépendance et événement contraire

A et B sont indépendants avec $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}6$. Calculer $P(A \cap \overline{B})$ et vérifier que A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Exercice 15 – Type bac : probabilité inversée (Bayes)

En reprenant l'usine ($P(D) = 0{,}038$), sachant qu'une pièce est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle vienne de M1.

Exercice 16 – Type bac : test de dépistage

Une maladie touche 1% d'une population. Un test est positif chez 90% des malades et chez 5% des sains. Calculer la probabilité qu'un test soit positif.

Exercice 17 – Type bac : succession indépendante

On lance 3 fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir exactement « Pile, Pile, Face » dans cet ordre.

Exercice 18 – Type bac : arbre à trois branches

Trois fournisseurs livrent 50%, 30% et 20% des composants, avec des taux de panne 1%, 2% et 4%. Calculer la probabilité P qu'un composant tombe en panne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Type bac : retrouver P(A)

On sait que $P_A(B) = 0{,}8$, $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}5$. Déterminer $P(A)$, puis $P_B(A)$.

Exercice 20 – Type bac : deux tirages sans remise

Une urne contient 4 boules rouges et 6 bleues. On tire successivement deux boules sans remise.

1. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

2. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur.

3. Sachant que les deux boules sont de la même couleur, quelle est la probabilité qu'elles soient rouges ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Définition

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$.

Réponse. $P_A(B) = 0{,}4$.

Rappel de cours. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$: probabilité de B « sachant A ».

Correction de l'exercice 2 – Probabilité d'une intersection

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}18$.

Rappel de cours. Sur un arbre : la probabilité d'un chemin est le produit des branches, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Correction de l'exercice 3 – Compléter un arbre

$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$ (les branches d'un nœud se complètent à 1).

$P_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Réponse. $P(\overline{A}) = 0{,}6$; $P_A(\overline{B}) = 0{,}3$.

Rappel de cours. À chaque nœud, la somme des branches vaut 1.

Correction de l'exercice 4 – Traduire un énoncé

« 30 % des élèves » : $P(I) = 0{,}3$. « Parmi les internes, 40 % » : c'est une probabilité conditionnelle, $P_I(S) = 0{,}4$.

$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$.

Réponse. $P(I \cap S) = 0{,}12$.

Rappel de cours. « Parmi les A » signale une probabilité conditionnelle sachant A.

Correction de l'exercice 5 – Tableau croisé

$P(F) = \dfrac{30}{50}$, $P(F \cap L) = \dfrac{18}{50}$.

$P_F(L) = \dfrac{P(F \cap L)}{P(F)} = \dfrac{18\,/\,50}{30\,/\,50} = \dfrac{18}{30} = 0{,}6$.

Réponse. $P_F(L) = 0{,}6$.

Rappel de cours. Avec des effectifs, « sachant F » revient à restreindre à F : ici $\frac{18}{30}$.

Correction de l'exercice 6 – Probabilité d'un chemin

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}3$.

Rappel de cours. On multiplie le long d'un chemin de l'arbre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Probabilités totales (2 branches)

$P(\overline{A}) = 0{,}6$. Probabilités totales : $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.

$= 0{,}4 \times 0{,}7 + 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}28 + 0{,}18 = 0{,}46$.

Réponse. $P(B) = 0{,}46$.

Rappel de cours. Formule des probabilités totales : on somme les probabilités de tous les chemins menant à B.

Correction de l'exercice 8 – Tableau croisé dans les deux sens

$P_F(S)$: parmi les 90 filles, 60 regardent la série. $P_F(S) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$.

$P_S(F)$: parmi les 120 élèves qui regardent, 60 sont des filles. $P_S(F) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

Réponse. $P_F(S) = \frac{2}{3}$ et $P_S(F) = \frac{1}{2}$.

Rappel de cours. Avec un tableau, $P_A(B) = \dfrac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de } A}$.

Erreur fréquente. $P_F(S)$ et $P_S(F)$ n'ont aucune raison d'être égales : on ne divise pas par le même effectif.

Correction de l'exercice 9 – Probabilité de l'événement contraire par l'arbre

Formule des probabilités totales : $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.

$P(B) = 0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}14 + 0{,}18 = 0{,}32$.

$P(\overline{B}) = 1 - 0{,}32 = 0{,}68$.

Réponse. $P(B) = 0{,}32$ et $P(\overline{B}) = 0{,}68$.

Rappel de cours. A et $\overline{A}$ forment une partition : chaque chemin vers B passe par l'un des deux.

Correction de l'exercice 10 – Tester l'indépendance

Indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2 = P(A \cap B)$.

Les deux sont égaux : A et B sont indépendants.

Réponse. Oui, indépendants ($P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}2$).

Rappel de cours. Indépendance : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ou de façon équivalente $P_A(B) = P(B)$.

Correction de l'exercice 11 – Probabilité conditionnelle inversée

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4.$$

Réponse. $P_B(A) = 0{,}4$.

Rappel de cours. Attention au conditionnement : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; on divise par la probabilité de la condition (B ici).

Erreur fréquente. $P_B(A) \neq P_A(B)$ en général : l'ordre du conditionnement compte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Arbre complet

$P(M_1) = 0{,}6$, $P_{M_1}(D) = 0{,}03$; $P(M_2) = 0{,}4$, $P_{M_2}(D) = 0{,}05$.

$P(D) = 0{,}6 \times 0{,}03 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}018 + 0{,}02 = 0{,}038$.

Réponse. $P(D) = 0{,}038$ (soit 3,8%).

Rappel de cours. On somme les chemins menant au défaut, via M1 et via M2.

Correction de l'exercice 13 – Indépendance et réunion

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}6 - 0{,}12 = 0{,}68$.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}12$; $P(A \cup B) = 0{,}68$.

Rappel de cours. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Correction de l'exercice 14 – Indépendance et événement contraire

$P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$ (indépendance).

A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$: $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3 - 0{,}18 = 0{,}12$.

$P(A) \times P(\overline{B}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12 = P(A \cap \overline{B})$: A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Réponse. $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}12 = P(A)P(\overline{B})$.

Rappel de cours. Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi (propriété générale).

Correction de l'exercice 15 – Type bac : probabilité inversée (Bayes)

$P_D(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap D)}{P(D)}$.

$P(M_1 \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}03 = 0{,}018$. Donc $P_D(M_1) = \dfrac{0{,}018}{0{,}038} \approx 0{,}474$.

Réponse. $P_D(M_1) \approx 0{,}474$.

Rappel de cours. Probabilité « inversée » : $P_D(M_1) = \dfrac{P(M_1)P_{M_1}(D)}{P(D)}$. On échange la condition.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : test de dépistage

$P(M) = 0{,}01$, $P_M(T) = 0{,}9$, $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}05$, $P(\overline{M}) = 0{,}99$.

$P(T) = 0{,}01 \times 0{,}9 + 0{,}99 \times 0{,}05 = 0{,}009 + 0{,}0495 = 0{,}0585$.

Réponse. $P(T) \approx 0{,}0585$.

Rappel de cours. Arbre malade/sain puis test +/− ; probabilités totales pour $P(T)$.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : succession indépendante

Les lancers sont indépendants : la probabilité d'une suite d'issues est le produit.

$P(\text{P, P, F}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Réponse. $\dfrac{1}{8} = 0{,}125$.

Rappel de cours. Pour des épreuves indépendantes, on multiplie les probabilités le long de la succession.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 18 – Type bac : arbre à trois branches

$P(F_1) = 0{,}5$, $P(F_2) = 0{,}3$, $P(F_3) = 0{,}2$; taux : 0,01, 0,02, 0,04.

$P(\text{panne}) = 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}02 + 0{,}2 \times 0{,}04 = 0{,}005 + 0{,}006 + 0{,}008 = 0{,}019$.

Réponse. $P(\text{panne}) = 0{,}019$ (soit 1,9%).

Rappel de cours. Probabilités totales avec plusieurs cas : on somme $P(F_i) \times P_{F_i}(\text{panne})$.

Correction de l’exercice 19 – Type bac : retrouver P(A)

On pose $p = P(A)$. Probabilités totales : $0{,}8p + 0{,}3(1 - p) = 0{,}5$.

$0{,}5p + 0{,}3 = 0{,}5$, donc $p = 0{,}4$.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}8}{0{,}5} = \frac{0{,}32}{0{,}5} = 0{,}64.$$

Réponse. $P(A) = 0{,}4$ et $P_B(A) = 0{,}64$.

Rappel de cours. La formule des probabilités totales devient une équation quand une donnée de l’arbre est inconnue.

Correction de l’exercice 20 – Type bac : deux tirages sans remise

1) Arbre : $P(R_1) = \frac{4}{10}$, puis il reste 3 rouges sur 9 boules : $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{9}$.
$P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$.

2) Deux bleues : $\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$. Même couleur : $\frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{2}{15} + \frac{5}{15} = \frac{7}{15}$.

3) $P_{\text{même}}(\text{rouges}) = \dfrac{2/15}{7/15} = \frac{2}{7}$.

Réponse. $\frac{2}{15}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{2}{7}$.

Rappel de cours. Sans remise, la composition de l’urne change entre les deux tirages : les probabilités du second niveau sont conditionnelles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).