Produit scalaire dans le plan — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Dans le plan, le produit scalaire de deux vecteurs se calcule de plusieurs façons : par les coordonnées $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$, ou par les normes et l'angle $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$. Il s'annule exactement quand les vecteurs sont orthogonaux. Ces exercices corrigés couvrent calcul, orthogonalité, angles, normes et applications géométriques. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/produit-scalaire

Exercice 1 – Produit scalaire par coordonnées

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}(3\,;2)$ et $\vec{v}(1\,;-4)$.

Exercice 2 – Norme d'un vecteur

Calculer la norme de $\vec{u}(3\,;4)$.

Exercice 3 – Orthogonalité

Les vecteurs $\vec{u}(2\,;3)$ et $\vec{v}(-3\,;2)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 4 – Carré scalaire

On sait que $\|\vec{u}\| = 3$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{u}$, $\vec{u} \cdot (-\vec{u})$ et $\vec{u} \cdot (2\vec{u})$.

Exercice 5 – Produit scalaire avec l'angle

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ et un angle de $60°$.

Exercice 6 – Trouver une coordonnée

Déterminer y pour que $\vec{u}(2\,;y)$ et $\vec{v}(3\,;-1)$ soient orthogonaux.

Exercice 7 – Produit scalaire à partir de points

Soit $A(1\,;2)$, $B(4\,;3)$, $C(2\,;6)$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 8 – Produits scalaires dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté 4. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Angle entre deux vecteurs

Déterminer l'angle géométrique entre $\vec{u}(1\,;0)$ et $\vec{v}(1\,;\sqrt{3})$.

Exercice 10 – Calcul d'un angle

Calculer $\cos\theta$ où θ est l'angle entre $\vec{u}(1\,;2)$ et $\vec{v}(3\,;1)$.

Exercice 11 – Identité de polarisation

Sachant $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 7$, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Exercice 12 – Triangle rectangle

Soit $A(0\,;0)$, $B(4\,;2)$, $C(1\,;-2)$. Le triangle ABC est-il rectangle en A ?

Exercice 13 – Projeté orthogonal

On donne $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 12$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$. Sachant que H est le projeté orthogonal de C sur (AB), calculer $\overline{AH}$ (mesure algébrique) via $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

Exercice 14 – Al-Kashi pour trouver un angle

Un triangle ABC a pour côtés $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 7$. Calculer l'angle $B\hat{A}C$.

Exercice 15 – Équation de droite avec un vecteur normal

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3\,;4)$.

Exercice 16 – Type bac : théorème d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC, $AB = 5$, $AC = 8$ et l'angle $B\hat{A}C = 60°$. Calculer BC.

Exercice 17 – Type bac : équation de cercle

Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$, avec $A(0\,;0)$ et $B(4\,;0)$.

Exercice 18 – Type bac : orthogonalité et hauteur

Soit $A(1\,;1)$, $B(5\,;3)$, $C(2\,;4)$. Déterminer un vecteur directeur de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Exercice 19 – Type bac : produit scalaire et carré scalaire

Développer $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ en fonction de $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Type bac : projeté sur une droite et distance

Soit $d : 3x + 4y - 5 = 0$ et $M(4\,;7)$. On cherche le projeté orthogonal H de M sur d.

1. Justifier que H s'écrit $H(4 + 3t\,;7 + 4t)$ pour un réel t.

2. Déterminer t, puis les coordonnées de H.

3. En déduire la distance du point M à la droite d.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Produit scalaire par coordonnées

Formule : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

$= 3\times 1 + 2\times(-4) = 3 - 8 = -5$.

Réponse. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -5$.

Rappel de cours. Dans un repère orthonormé : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ (produit des abscisses + produit des ordonnées).

Correction de l'exercice 2 – Norme d'un vecteur

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Réponse. $\|\vec{u}\| = 5$.

Rappel de cours. Norme : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ (théorème de Pythagore).

Correction de l'exercice 3 – Orthogonalité

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times(-3) + 3\times 2 = -6 + 6 = 0$.

Le produit scalaire est nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Réponse. Oui, $\vec{u}\perp\vec{v}$ ($\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$).

Rappel de cours. $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Correction de l'exercice 4 – Carré scalaire

$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 9$ (angle nul, $\cos 0 = 1$).

$\vec{u}\cdot(-\vec{u}) = -\vec{u}\cdot\vec{u} = -9$.

$\vec{u}\cdot(2\vec{u}) = 2\,\vec{u}\cdot\vec{u} = 18$.

Réponse. 9, -9 et 18.

Rappel de cours. $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, et le produit scalaire est bilinéaire : $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k\,\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Correction de l'exercice 5 – Produit scalaire avec l'angle

Formule : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$.

$= 4\times 3\times\cos 60° = 12\times\dfrac{1}{2} = 6$.

Réponse. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 6$.

Rappel de cours. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$. $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – Trouver une coordonnée

Orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 3 + y\times(-1) = 6 - y$. $6 - y = 0 \Rightarrow y = 6$.

Réponse. $y = 6$.

Rappel de cours. On pose le produit scalaire nul et on résout l'équation.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Produit scalaire à partir de points

$\overrightarrow{AB}(4-1\,;3-2) = (3\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(2-1\,;6-2) = (1\,;4)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 1 + 1\times 4 = 3+4 = 7$.

Réponse. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7$.

Rappel de cours. On calcule d'abord les coordonnées des vecteurs (arrivée − départ), puis le produit scalaire.

Correction de l'exercice 8 – Produits scalaires dans un carré

Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = 16$.

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$.

$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -AB^2 = -16$.

Réponse. 16, 0 et -16.

Rappel de cours. Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

Correction de l'exercice 9 – Angle entre deux vecteurs

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 1 + 0\times\sqrt{3} = 1$. $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{1+3} = 2$.

$\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \dfrac{1}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ (60°).

Réponse. $\theta = 60^\circ$.

Rappel de cours. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$ relie la formule analytique et la formule géométrique.

Correction de l'exercice 10 – Calcul d'un angle

$\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 3 + 2\times 1 = 5$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$.

$\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\theta = 45°$.

Réponse. $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = 45°$.

Rappel de cours. $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$. $\sqrt{5}\times\sqrt{10} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 11 – Identité de polarisation

On utilise $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

$7^2 = 5^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + 3^2$, soit $49 = 25 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + 9 = 34 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$.

$2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = 15$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = 7{,}5$.

Réponse. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 7{,}5$.

Rappel de cours. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$: permet d'obtenir le produit scalaire à partir des normes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Triangle rectangle

$\overrightarrow{AB}(4\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;-2)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + 2\times(-2) = 4-4 = 0$.

Le produit scalaire est nul : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, donc le triangle est rectangle en A.

Réponse. Oui, rectangle en A ($\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$).

Rappel de cours. Triangle rectangle en $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

Correction de l'exercice 13 – Projeté orthogonal

$\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = \overline{AB}\times\overline{AH}$ (mesures algébriques sur (AB)).

Donc $12 = 4\times\overline{AH}$, soit $\overline{AH}=3$.

Réponse. $\overline{AH}=3$.

Rappel de cours. Avec le projeté : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AH}$, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Correction de l'exercice 14 – Al-Kashi pour trouver un angle

Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\times AC\cos\hat{A}$.

$49 = 25+64-80\cos\hat{A}$, donc $80\cos\hat{A}=40$ et $\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$.

$B\hat{A}C = 60^\circ$.

Réponse. $B\hat{A}C = 60^\circ$.

Rappel de cours. Al-Kashi généralise Pythagore : si $\hat{A}=90^\circ$, le terme en cosinus disparaît.

Correction de l'exercice 15 – Équation de droite avec un vecteur normal

$M(x\,;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow 3(x-2)+4(y+1)=0$.

En développant : $3x+4y-6+4=0$, soit $3x+4y-2=0$.

Vérification : $3\times 2+4\times(-1)-2=0$.

Réponse. d : $3x+4y-2=0$.

Rappel de cours. Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : théorème d'Al-Kashi

Al-Kashi : $BC^2 = AB^2+AC^2-2\,AB\cdot AC\cos B\hat{A}C$.

$BC^2 = 25+64-2\times 5\times 8\times\cos 60° = 89-80\times\dfrac{1}{2} = 89-40 = 49$.

$BC=\sqrt{49}=7$.

Réponse. $BC=7$.

Rappel de cours. Théorème d'Al-Kashi (généralisation de Pythagore) : $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 17 – Type bac : équation de cercle

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ signifie que M voit $[AB]$ sous un angle droit : c'est le cercle de diamètre $[AB]$.

$\overrightarrow{MA}(0-x\,;0-y) = (-x\,;-y)$ et $\overrightarrow{MB}(4-x\,;-y)$. Produit scalaire :
$(-x)(4-x) + (-y)(-y) = x^2 - 4x + y^2$.

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$: cercle de centre $(2\,;0)$, rayon 2.

Réponse. Le cercle de diamètre $[AB]$: $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

Rappel de cours. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ caractérise le cercle de diamètre $[AB]$ (angle droit inscrit).

Correction de l'exercice 18 – Type bac : orthogonalité et hauteur

La hauteur issue de C est perpendiculaire à (AB) : son vecteur directeur est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}(5-1\,;3-1) = (4\,;2)$. Un vecteur orthogonal est $\vec{n}(2\,;-4)$ (car $(4)(2) + (2)(-4) = 8 - 8 = 0$), ou $(-2\,;4)$, ou plus simple $(1\,;-2)$.

Réponse. Un vecteur directeur de la hauteur issue de C est $(1\,;-2)$.

Rappel de cours. Un vecteur orthogonal à $(a\,;b)$ est $(b\,;-a)$ (ou $(-b\,;a)$) : on échange les coordonnées et on change un signe.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : produit scalaire et carré scalaire

On développe comme un produit, en utilisant la bilinéarité et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

$(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot \vec{v}$.

$= \|\vec{u}\|^2 + (-1+2)\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2$.

Réponse. $\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2$.

Rappel de cours. Le produit scalaire se développe comme un produit algébrique : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : projeté sur une droite et distance

1) $\vec{n}(3\,;4)$ est normal à d : (MH) est dirigée par $\vec{n}$, donc $\overrightarrow{MH} = t\vec{n}$ pour un réel t.

2) $H \in d$: $3(4+3t) + 4(7+4t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 35 + 25t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{7}{5}$.

$H\left(4 - \frac{21}{5}\,;7 - \frac{28}{5}\right) = \left(-\frac{1}{5}\,;\frac{7}{5}\right)$.

3) $MH = |t| \times \|\vec{n}\| = \frac{7}{5} \times 5 = 7$.

Réponse. $H\left(-\frac{1}{5}\,;\frac{7}{5}\right)$ et la distance de M à d vaut 7.

Rappel de cours. Le projeté orthogonal réalise la plus courte distance d'un point à une droite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).