Second degré — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Le second degré, c'est l'étude des fonctions et équations de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Ces exercices corrigés couvrent tout le programme de Première spécialité : discriminant, racines, forme canonique, factorisation, signe du trinôme, sommet de la parabole et problèmes d'optimisation type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/second-degre

Exercice 1 – Reconnaître a, b, c et calculer Δ

Pour le trinôme $x^2 - 5x + 6$, donner a, b, c puis calculer le discriminant Δ.

Exercice 2 – Discriminant avec a ≠ 1

Calculer le discriminant de $2x^2 + 3x - 2$ et dire combien il a de racines.

Exercice 3 – Résoudre quand Δ > 0

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Exercice 4 – Trinôme écrit sous forme de produit

Soit $f(x) = (x - 1)(3 - 2x)$. Développer $f(x)$, donner a, b, c et calculer Δ.

Exercice 5 – Résoudre quand Δ = 0

Résoudre $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Exercice 6 – Résoudre quand Δ < 0

Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$.

Exercice 7 – Forme canonique

Mettre $f(x) = x^2 - 6x + 5$ sous forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Exercice 8 – Somme et produit des racines

Trouver deux nombres dont la somme vaut 7 et le produit 12.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Factoriser un trinôme

Factoriser $2x^2 - 8$ puis $3x^2 - 12x$.

Exercice 10 – Forme factorisée et signe

Avec $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$ ($\Delta = 1$), déterminer les racines, écrire $f(x)$ sous forme factorisée et donner son tableau de signes.

Exercice 11 – Signe d'un trinôme

Étudier le signe de $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ selon les valeurs de x.

Exercice 12 – Inéquation du second degré

Résoudre l'inéquation $x^2 - x - 6 \geq 0$.

Exercice 13 – Sommet de la parabole

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$. Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

Exercice 14 – Optimisation : aire maximale

Un rectangle a un périmètre de 20 cm. On note x sa largeur. Exprimer son aire $A(x)$ en fonction de x, puis déterminer la largeur qui rend l'aire maximale.

Exercice 15 – Équation bicarrée

Résoudre $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Exercice 16 – Intersection d'une parabole et d'une droite

Déterminer les points d'intersection de la parabole $P : y = x^2 - 3x + 1$ et de la droite $d : y = x - 2$.

Exercice 17 – Trinôme passant par trois points

Déterminer le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $f(0) = 3$, $f(1) = 0$ et $f(-1) = 8$.

Exercice 18 – Type bac : discussion selon un paramètre

Soit m un réel. Discuter, selon les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $x^2 - 2x + m = 0$.

Exercice 19 – Type bac : trajectoire d'un projectile

Un ballon est lancé : sa hauteur (en mètres) après t secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t$, pour $t \geq 0$. 1) Quelle est la hauteur maximale atteinte et à quel instant ? 2) À quel instant le ballon retombe-t-il au sol ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Type bac : bénéfice d'une entreprise

Une entreprise vend chaque objet 60 €. Le coût de production de q objets est $C(q) = q^2 + 20q + 300$ (en €), pour $q \in [0\,;50]$.

1. Montrer que le bénéfice est $B(q) = -q^2 + 40q - 300$.

2. Pour quelles quantités l'entreprise est-elle rentable ($B(q) \geq 0$) ?

3. Quelle quantité maximise le bénéfice ? Quel est ce bénéfice maximal ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître a, b, c et calculer Δ

On identifie $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.

Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$.

$\Delta = 1 > 0$: le trinôme aura deux racines distinctes.

Réponse. $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$, $\Delta = 1$.

Rappel de cours. Pour $ax^2 + bx + c$, le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$. Son signe donne le nombre de racines.

Erreur fréquente. Attention au signe : $(-5)^2 = 25$ (et non -25). On élève b au carré, donc le résultat est positif.

Correction de l'exercice 2 – Discriminant avec a ≠ 1

$a = 2$, $b = 3$, $c = -2$.

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$.

$\Delta = 25 > 0$: il y a deux racines réelles distinctes.

Réponse. $\Delta = 25 > 0$: deux racines distinctes.

Erreur fréquente. $-4ac = -4 \times 2 \times (-2) = +16$: le produit de deux signes $-$ redonne un $+$. Soigne les signes.

Correction de l'exercice 3 – Résoudre quand Δ > 0

On a vu $\Delta = 1 > 0$, donc deux racines : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{1}}{2} = \dfrac{5 - 1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{1}}{2} = \dfrac{5 + 1}{2} = 3$.

Réponse. $S = \{2\,;3\}$.

Rappel de cours. Si $\Delta > 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Ici $-b = -(-5) = 5$.

Correction de l'exercice 4 – Trinôme écrit sous forme de produit

$f(x) = 3x - 2x^2 - 3 + 2x = -2x^2 + 5x - 3$.

$a = -2$, $b = 5$, $c = -3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times (-2) \times (-3) = 25 - 24 = 1$.

Réponse. $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$, $\Delta = 1$.

Rappel de cours. a, b, c se lisent sur la forme développée réduite $ax^2 + bx + c$.

Erreur fréquente. $-4ac = -4 \times (-2) \times (-3) = -24$: trois signes moins donnent un résultat négatif.

Correction de l'exercice 5 – Résoudre quand Δ = 0

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Quand $\Delta = 0$, il y a une racine double : $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$.

On reconnaît d'ailleurs l'identité remarquable $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Réponse. $S = \{2\}$ (racine double).

Rappel de cours. Si $\Delta = 0$: une seule racine $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$, et $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

Correction de l'exercice 6 – Résoudre quand Δ < 0

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$.

$\Delta < 0$: il n'y a aucune racine réelle, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Réponse. $S = \varnothing$ (pas de solution réelle).

Rappel de cours. Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ ne s'annule jamais et garde le signe de a sur $\mathbb{R}$.

Erreur fréquente. On ne peut pas calculer $\sqrt{\Delta}$ quand $\Delta < 0$: ne pas inventer de racine, on conclut « pas de solution ».

Correction de l'exercice 7 – Forme canonique

On utilise $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$.

$\beta = f(\alpha) = f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$.

Donc $f(x) = (x-3)^2 - 4$. (On peut vérifier : $(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5$.)

Réponse. $f(x) = (x-3)^2 - 4$.

Rappel de cours. Forme canonique : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. (α, β) est le sommet.

Correction de l'exercice 8 – Somme et produit des racines

Deux nombres de somme $S = 7$ et produit $P = 12$ sont les racines de $x^2 - Sx + P = 0$, soit $x^2 - 7x + 12 = 0$.

$\Delta = 49 - 48 = 1$, donc $x = \dfrac{7 \pm 1}{2}$: $x_1 = 3$ et $x_2 = 4$.

Vérification : $3 + 4 = 7$ et $3 \times 4 = 12$. ✓

Réponse. Les deux nombres sont 3 et 4.

Rappel de cours. Pour $ax^2 + bx + c$: somme des racines $= -\dfrac{b}{a}$, produit $= \dfrac{c}{a}$.

Correction de l'exercice 9 – Factoriser un trinôme

$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x-2)(x+2)$ (identité $a^2 - b^2$).

$3x^2 - 12x = 3x(x-4)$: on met $3x$ en facteur commun.

Réponse. $2x^2 - 8 = 2(x-2)(x+2)$; $3x^2 - 12x = 3x(x-4)$.

Rappel de cours. Si le trinôme a deux racines x_1, x_2 : $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Sinon, chercher un facteur commun ou une identité remarquable.

Correction de l'exercice 10 – Forme factorisée et signe

$x_1 = \dfrac{-5-1}{2 \times (-2)} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-5+1}{-4} = 1$.

Forme factorisée : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = -2(x-1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Signe : f a le signe de $a = -2$ (négatif) à l'extérieur des racines, le signe contraire entre elles. $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;1[\cup \left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$, $f(x) > 0$ sur $\left]1\,;\frac{3}{2}\right[$.

Réponse. $f(x) = -2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$, positive seulement entre 1 et $\frac{3}{2}$.

Rappel de cours. Un trinôme est du signe de a sauf entre ses racines.

Erreur fréquente. Ne pas oublier le coefficient $a = -2$ devant la forme factorisée.

Correction de l'exercice 11 – Signe d'un trinôme

$a = -1$, $b = 4$, $c = -3$. $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$: deux racines.

$x = \frac{-4 \pm 2}{-2}$: $x_1 = \frac{-4+2}{-2} = 1$ et $x_2 = \frac{-4-2}{-2} = 3$.

Règle du signe : un trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe de $-a$ entre les racines. Ici $a = -1 < 0$.

Donc $g(x) < 0$ sur $]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$, $g(x) > 0$ sur $]1;3[$, et $g(x) = 0$ en 1 et 3.

Réponse. $g > 0$ sur $]1;3[$; $g < 0$ sur $]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$; $g = 0$ en 1 et 3.

Rappel de cours. « Signe de a à l'extérieur des racines, signe de $-a$ entre les racines. » Quand $\Delta \leq 0$, le signe est constant (celui de a).

Correction de l'exercice 12 – Inéquation du second degré

Racines de $x^2 - x - 6$: $\Delta = 1 + 24 = 25$, $x = \frac{1 \pm 5}{2}$ donne $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$.

Ici $a = 1 > 0$: le trinôme est positif à l'extérieur des racines.

On cherche ≥ 0, donc on prend l'extérieur, bornes incluses : $x \leq -2$ ou $x \geq 3$.

Réponse. $S =]-\infty;-2] \cup [3;+\infty[$.

Erreur fréquente. $\geq$ (large) inclut les racines : on met des crochets fermés en -2 et 3. Avec $>$ (strict), on les exclut.

Correction de l'exercice 13 – Sommet de la parabole

Abscisse du sommet : $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$.

Ordonnée : $\beta = f(2) = 2 \times 4 - 16 + 5 = 8 - 16 + 5 = -3$.

$a = 2 > 0$: la parabole est « tournée vers le haut », le sommet est un minimum.

Réponse. Sommet $(2\,;-3)$, minimum de f (car $a > 0$).

Rappel de cours. Sommet en $\alpha = \frac{-b}{2a}$. Si $a > 0$ la parabole admet un minimum, si $a < 0$ un maximum.

Correction de l'exercice 14 – Optimisation : aire maximale

Périmètre = 20 donne 2(largeur + longueur) = 20, donc largeur + longueur = 10 : la longueur vaut $10 - x$.

Aire : $A(x) = x(10-x) = 10x - x^2 = -x^2 + 10x$, pour $x \in]0;10[$.

$a = -1 < 0$: A admet un maximum au sommet, en $\alpha = \frac{-10}{2 \times (-1)} = 5$.

$A(5) = 5 \times 5 = 25$. L'aire maximale (un carré de côté 5) vaut 25 cm^2.

Réponse. $A(x) = -x^2 + 10x$; aire maximale 25 cm^2 pour une largeur $x = 5$ cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Beaucoup de problèmes d'optimisation se ramènent au sommet d'une parabole : on modélise par un trinôme puis on cherche $\alpha = \frac{-b}{2a}$.

Correction de l'exercice 15 – Équation bicarrée

On pose $X = x^2$ (avec $X \geq 0$). L'équation devient $X^2 - 5X + 4 = 0$.

$\Delta = 25 - 16 = 9$, $X = \frac{5 \pm 3}{2}$: $X = 1$ ou $X = 4$.

Retour à x : $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$; $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Réponse. $S = \{-2\,;-1\,;1\,;2\}$.

Rappel de cours. Une équation bicarrée $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se résout en posant $X = x^2 \geq 0$, puis en revenant à x (deux solutions $\pm$ par $X > 0$).

Erreur fréquente. Ne garder que les $X \geq 0$: si on trouvait $X = -1$, il n'y aurait aucun x réel correspondant.

Correction de l'exercice 16 – Intersection d'une parabole et d'une droite

Un point commun vérifie les deux équations : $x^2 - 3x + 1 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$.

$\Delta = 16 - 12 = 4$, racines $x = \frac{4-2}{2} = 1$ et $x = \frac{4+2}{2} = 3$.

Ordonnées avec la droite : pour $x = 1$, $y = -1$; pour $x = 3$, $y = 1$.

Réponse. Les points $(1\,;-1)$ et $(3\,;1)$.

Rappel de cours. Intersection de deux courbes : on résout $f(x) = g(x)$, puis on calcule les ordonnées.

Correction de l'exercice 17 – Trinôme passant par trois points

$f(0) = c = 3$.

$f(1) = a + b + 3 = 0$, donc $a + b = -3$. $f(-1) = a - b + 3 = 8$, donc $a - b = 5$.

En additionnant : $2a = 2$, $a = 1$; puis $b = -3 - 1 = -4$.

Vérification : $f(-1) = 1 + 4 + 3 = 8$.

Réponse. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Rappel de cours. Trois conditions déterminent les trois coefficients a, b, c : on obtient un système.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : discussion selon un paramètre

Discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times m = 4 - 4m$.

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 1$: deux solutions distinctes.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$: une solution double ($x = 1$).

$\Delta < 0 \Leftrightarrow m > 1$: aucune solution réelle.

Réponse. $m < 1$: 2 solutions ; $m = 1$: 1 solution double ; $m > 1$: aucune solution.

Rappel de cours. Le nombre de solutions ne dépend que du signe de Δ. Avec un paramètre, on étudie le signe de $\Delta(m)$.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : trajectoire d'un projectile

h est un trinôme avec $a = -5 < 0$: maximum au sommet, en $t = \frac{-20}{2 \times (-5)} = 2$ s.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$h(2) = -5 \times 4 + 20 \times 2 = -20 + 40 = 20$: hauteur maximale 20 m à $t = 2$ s.

Retour au sol : $h(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t = 0 \Leftrightarrow -5t(t-4) = 0$, donc $t = 0$ (départ) ou $t = 4$.

Le ballon retombe à $t = 4$ s.

Réponse. Hauteur max 20 m à $t = 2$ s ; retombée au sol à $t = 4$ s.

Rappel de cours. Hauteur max = ordonnée du sommet ; retour au sol = résolution de $h(t) = 0$ (souvent par factorisation).

Correction de l'exercice 20 – Type bac : bénéfice d'une entreprise

1) Recette $60q$. $B(q) = 60q - (q^2 + 20q + 300) = -q^2 + 40q - 300$.

2) $\Delta = 1\,600 - 1\,200 = 400$, racines $q = \frac{-40-20}{-2} = 30$ et $q = \frac{-40+20}{-2} = 10$. Avec $a = -1 < 0$, $B \geq 0$ entre les racines : rentable pour $q \in [10\,;30]$.

3) Le sommet a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a} = 20$ (milieu des racines).
$B(20) = -400 + 800 - 300 = 100$.

Réponse. Rentable de 10 à 30 objets ; bénéfice maximal 100 € pour 20 objets.

Rappel de cours. Le sommet d'une parabole est à mi-chemin des racines : $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).