Suites arithmétiques — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une suite arithmétique passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre, la raison r : $u_{n+1} = u_n + r$. Sa formule explicite est $u_n = u_0 + nr$, et la somme de ses termes se calcule avec « nombre de termes $\times \frac{\text{1er} + \text{dernier}}{2}$ ». Ces exercices corrigés couvrent reconnaissance, raison, formule explicite, sommes et problèmes concrets. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/suites-arithmetiques

Exercice 1 – Calculer des termes

Soit (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 4$. Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 2 – Reconnaître une suite arithmétique

La suite $2\,;5\,;8\,;11\,;14\,;\ldots$ est-elle arithmétique ? Si oui, donner sa raison.

Exercice 3 – Raison à partir de l'expression

Montrer que $u_n = 5 - 2n$ définit une suite arithmétique et donner sa raison.

Exercice 4 – Premier terme d'indice 1

$(u_n)_{n \geq 1}$ est arithmétique de premier terme $u_1 = 10$ et de raison -3. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{20}.

Exercice 5 – Formule explicite

Soit (u_n) arithmétique avec $u_0 = 7$ et $r = 3$. Donner u_n en fonction de n, puis u_{10}.

Exercice 6 – Terme d'indice quelconque

Soit (u_n) arithmétique avec $u_0 = -2$ et $r = 5$. Calculer u_{100}.

Exercice 7 – Raison à partir de deux termes

Une suite arithmétique vérifie $u_2 = 11$ et $u_6 = 27$. Déterminer la raison r, puis u_0.

Exercice 8 – Sens de variation

Préciser le sens de variation d'une suite arithmétique de raison $r = -3$, puis d'une autre de raison $r = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Prouver qu'une suite est arithmétique

Soit $u_n = \dfrac{3n+1}{2}$. Montrer que (u_n) est arithmétique, puis préciser sa raison et son premier terme.

Exercice 10 – Une suite qui n'est pas arithmétique

La suite $u_n = n^2$ est-elle arithmétique ?

Exercice 11 – Somme des premiers entiers

Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50$.

Exercice 12 – Somme de termes consécutifs

Soit (u_n) arithmétique avec $u_0 = 4$, $r = 3$. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

Exercice 13 – Trouver le nombre de termes

Combien y a-t-il de termes dans la suite arithmétique $7\,;10\,;13\,;\ldots\,;100$?

Exercice 14 – Somme des nombres impairs

Calculer $S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99$. Généraliser : que vaut $1 + 3 + \cdots + (2n-1)$?

Exercice 15 – Somme à partir d'un terme quelconque

Soit $u_n = 2n + 3$. Calculer $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{20}$.

Exercice 16 – Type bac : modélisation (épargne)

Léa place 200 € puis ajoute 50 € chaque mois. On note u_n la somme après n mois. 1) Justifier que (u_n) est arithmétique. 2) Calculer la somme après 2 ans.

Exercice 17 – Type bac : somme totale

Un théâtre a 20 sièges au premier rang, puis 2 de plus à chaque rang suivant, sur 15 rangs. Combien de sièges au total ?

Exercice 18 – Type bac : terme dépassant un seuil

Soit (u_n) arithmétique avec $u_0 = 5$, $r = 4$. À partir de quel rang n a-t-on $u_n > 100$?

Exercice 19 – Type bac : somme avec inconnue

La somme des n premiers entiers $1 + 2 + \cdots + n$ vaut 210. Déterminer n.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Type bac : deux offres d'emploi

Deux entreprises proposent un poste. A : 24 000 € la première année, puis +900 € chaque année. B : 26 000 € la première année, puis +500 € chaque année. On note a_n et b_n les salaires de l'année n ($n = 1$ la première année).

1. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

2. À partir de quelle année le salaire annuel de A dépasse-t-il celui de B ?

3. Quelle offre rapporte le plus au total sur 10 ans ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des termes

On ajoute la raison $r = 4$ à chaque étape.

$u_1 = 3 + 4 = 7$; $u_2 = 7 + 4 = 11$; $u_3 = 11 + 4 = 15$.

Réponse. $u_1 = 7$, $u_2 = 11$, $u_3 = 15$.

Rappel de cours. Suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$. On ajoute toujours la même raison.

Correction de l'exercice 2 – Reconnaître une suite arithmétique

On calcule les différences successives : $5 - 2 = 3$, $8 - 5 = 3$, $11 - 8 = 3$, $14 - 11 = 3$.

La différence est constante (= 3) : la suite est arithmétique de raison $r = 3$.

Réponse. Oui, arithmétique de raison $r = 3$.

Rappel de cours. Une suite est arithmétique si la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

Correction de l'exercice 3 – Raison à partir de l'expression

$u_{n+1} - u_n = [5 - 2(n+1)] - [5 - 2n] = 5 - 2n - 2 - 5 + 2n = -2$.

La différence est constante $= -2$: suite arithmétique de raison $r = -2$.

Réponse. Arithmétique de raison $r = -2$.

Rappel de cours. Une suite de la forme $u_n = an + b$ est arithmétique de raison a.

Correction de l'exercice 4 – Premier terme d'indice 1

À partir de u_1, on ajoute $n - 1$ fois la raison : $u_n = u_1 + (n-1)r = 10 - 3(n-1) = 13 - 3n$.

$u_{20} = 13 - 60 = -47$.

Réponse. $u_n = 13 - 3n$ et $u_{20} = -47$.

Rappel de cours. $u_n = u_p + (n-p)r$ pour tous indices n et p.

Erreur fréquente. Écrire $u_n = 10 - 3n$ donnerait $u_1 = 7$: on part de u_1, pas de u_0.

Correction de l'exercice 5 – Formule explicite

Formule explicite : $u_n = u_0 + nr = 7 + 3n$.

$u_{10} = 7 + 3 \times 10 = 37$.

Réponse. $u_n = 7 + 3n$; $u_{10} = 37$.

Rappel de cours. Formule explicite : $u_n = u_0 + nr$. Permet de calculer un terme sans passer par tous les précédents.

Correction de l'exercice 6 – Terme d'indice quelconque

$u_n = u_0 + nr = -2 + 5n$.

$u_{100} = -2 + 5 \times 100 = -2 + 500 = 498$.

Réponse. $u_{100} = 498$.

Rappel de cours. La formule explicite évite 100 additions : on remplace directement n par 100.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Raison à partir de deux termes

$u_6 = u_2 + (6-2)r = u_2 + 4r$, soit $27 = 11 + 4r$, donc $4r = 16$ et $r = 4$.

$u_2 = u_0 + 2r$ donne $11 = u_0 + 8$, donc $u_0 = 3$.

Réponse. $r = 4$ et $u_0 = 3$.

Rappel de cours. $u_n = u_p + (n-p)r$: la différence d'indices multiplie la raison.

Correction de l'exercice 8 – Sens de variation

Le signe de la raison donne le sens : $r = -3 < 0$ donne une suite décroissante.

$r = 2 > 0$ donne une suite croissante.

Réponse. $r < 0$: décroissante ; $r > 0$: croissante.

Rappel de cours. Pour une suite arithmétique : $r > 0$ croissante, $r < 0$ décroissante, $r = 0$ constante.

Correction de l'exercice 9 – Prouver qu'une suite est arithmétique

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3(n+1)+1}{2} - \dfrac{3n+1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

La différence est constante (elle ne dépend pas de n) : la suite est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$, de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$.

Réponse. Arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$.

Rappel de cours. (u_n) est arithmétique $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n$ est une constante.

Correction de l'exercice 10 – Une suite qui n'est pas arithmétique

Premiers termes : $0\,;1\,;4\,;9$. Différences : 1, 3, 5.

Elles ne sont pas égales : la suite n'est pas arithmétique.

En général, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, qui dépend de n.

Réponse. Non : $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$ n'est pas constant.

Rappel de cours. Pour prouver qu'une suite n'est pas arithmétique, un contre-exemple sur trois termes suffit.

Correction de l'exercice 11 – Somme des premiers entiers

C'est la somme de termes arithmétiques (raison 1), de 1 à 50 : 50 termes.

$S = (\text{nb termes}) \times \dfrac{1\text{er} + \text{dernier}}{2} = 50 \times \dfrac{1+50}{2} = 50 \times 25{,}5 = 1275$.

Réponse. $S = 1275$.

Rappel de cours. Somme arithmétique : $(\text{nb termes}) \times \dfrac{1\text{er} + \text{dernier}}{2}$.

Correction de l'exercice 12 – Somme de termes consécutifs

Il y a 11 termes (de u_0 à u_{10}). $u_{10} = 4 + 3 \times 10 = 34$.

$S = 11 \times \dfrac{u_0 + u_{10}}{2} = 11 \times \dfrac{4+34}{2} = 11 \times 19 = 209$.

Réponse. $S = 209$.

Rappel de cours. Compter les termes : de u_0 à u_{10}, il y en a 11 (et non 10).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Nombre de termes de u_0 à u_n : c'est $n+1$. Oublier le +1 fausse la somme.

Correction de l'exercice 13 – Trouver le nombre de termes

Raison $r = 3$, premier terme 7. On cherche n tel que $u_n = 100$, avec $u_n = 7 + 3n$ (en comptant $u_0 = 7$).

$7 + 3n = 100 \Rightarrow 3n = 93 \Rightarrow n = 31$. Donc $u_{31} = 100$.

De u_0 à u_{31}, il y a 32 termes.

Réponse. Il y a 32 termes.

Rappel de cours. On résout u_n = dernier pour trouver l'indice, puis on ajoute 1 (terme de rang 0).

Correction de l'exercice 14 – Somme des nombres impairs

Les nombres impairs forment une suite arithmétique de raison 2. $99 = 2 \times 50 - 1$: il y a 50 termes.

Somme = nombre de termes $\times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2} = 50 \times \dfrac{1+99}{2} = 2\,500$.

En général : n termes, $n \times \dfrac{1 + (2n-1)}{2} = n^2$.

Réponse. $S = 2\,500 = 50^2$, et $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Rappel de cours. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique : nombre de termes $\times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Somme à partir d'un terme quelconque

Nombre de termes : de l'indice 5 à l'indice 20, il y en a $20 - 5 + 1 = 16$.

Premier terme $u_5 = 13$, dernier $u_{20} = 43$.

$S = 16 \times \dfrac{13 + 43}{2} = 16 \times 28 = 448$.

Réponse. $S = 448$.

Rappel de cours. Entre les indices p et q inclus, il y a $q - p + 1$ termes.

Erreur fréquente. Compter $20 - 5 = 15$ termes est l'erreur classique (on oublie un des deux bouts).

Correction de l'exercice 16 – Type bac : modélisation (épargne)

Chaque mois on ajoute 50 € : $u_{n+1} = u_n + 50$. C'est une suite arithmétique de raison 50, $u_0 = 200$.

$u_n = 200 + 50n$. Après 2 ans = 24 mois : $u_{24} = 200 + 50 \times 24 = 200 + 1200 = 1400$ €.

Réponse. (u_n) arithmétique ($r = 50$) ; après 2 ans : 1400 €.

Rappel de cours. « Ajouter une somme fixe à chaque période » ⇒ suite arithmétique. Convertir les années en mois.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : somme totale

Nombre de sièges au rang n (rang 1 = 20) : suite arithmétique de raison 2. Au rang 15 : $20 + 2 \times 14 = 48$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Somme des 15 rangs : $S = 15 \times \dfrac{20 + 48}{2} = 15 \times 34 = 510$.

Réponse. Il y a 510 sièges au total.

Rappel de cours. On identifie le premier terme, la raison, le dernier terme et le nombre de termes, puis on applique la formule de somme.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : terme dépassant un seuil

$u_n = 5 + 4n$. On résout $5 + 4n > 100$, soit $4n > 95$, donc $n > 23{,}75$.

Comme n est entier, la condition est vérifiée à partir de $n = 24$.

Réponse. $u_n > 100$ à partir de $n = 24$.

Rappel de cours. Pour un seuil sur une suite arithmétique, on résout l'inéquation puis on prend le premier entier convenable.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : somme avec inconnue

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} = 210$, donc $n(n+1) = 420$.

On résout $n^2 + n - 420 = 0$. $\Delta = 1 + 1680 = 1681 = 41^2$, $n = \dfrac{-1 + 41}{2} = 20$ (on garde la racine positive).

Réponse. $n = 20$.

Rappel de cours. La somme $\dfrac{n(n+1)}{2}$ conduit à une équation du second degré en n. On garde la solution entière positive.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : deux offres d'emploi

1) Suites arithmétiques : $a_n = 24\,000 + 900(n-1)$ et $b_n = 26\,000 + 500(n-1)$.

2) $a_n > b_n \Leftrightarrow 400(n-1) > 2\,000 \Leftrightarrow n - 1 > 5 \Leftrightarrow n > 6$. À partir de la 7^{e} année.

3) Sur 10 ans : $a_{10} = 32\,100$, total A $= 10 \times \dfrac{24\,000 + 32\,100}{2} = 280\,500$ €. $b_{10} = 30\,500$, total B $= 10 \times \dfrac{26\,000 + 30\,500}{2} = 282\,500$ €.

B rapporte 2 000 € de plus sur 10 ans, bien que A paie davantage chaque année à partir de la 7^{e}.

Réponse. A dépasse B dès la 7^{e} année, mais sur 10 ans B rapporte plus (282 500 € contre 280 500 €).

Rappel de cours. Comparer des termes et comparer des sommes sont deux questions différentes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).