Suites géométriques — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une suite géométrique passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même raison q : $u_{n+1} = q \times u_n$. Sa formule explicite est $u_n = u_0 \times q^n$, et la somme $1 + q + \cdots + q^n$ vaut $\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Ces exercices corrigés couvrent reconnaissance, raison, formule explicite, sommes et évolutions en pourcentage. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/suites-geometriques

Exercice 1 – Calculer des termes

Soit (u_n) géométrique avec $u_0 = 2$ et raison $q = 3$. Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 2 – Reconnaître une suite géométrique

La suite $3\,;6\,;12\,;24\,;\ldots$ est-elle géométrique ? Donner sa raison.

Exercice 3 – Raison depuis l'expression

Montrer que $u_n = 5 \times 2^n$ est géométrique et donner sa raison.

Exercice 4 – Raison négative

(u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$. Calculer u_1, u_2, u_3. La suite est-elle monotone ?

Exercice 5 – Formule explicite

Soit (u_n) géométrique avec $u_0 = 5$ et $q = 2$. Donner u_n, puis u_6.

Exercice 6 – Raison < 1

Soit (u_n) géométrique avec $u_0 = 80$ et $q = 0{,}5$. Calculer u_3 et donner le sens de variation.

Exercice 7 – Raison depuis deux termes

Une suite géométrique vérifie $u_0 = 3$ et $u_2 = 27$ (termes positifs). Déterminer la raison q.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Évolution en pourcentage

Une population augmente de 5% par an. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n, puis donner la nature de la suite.

Exercice 9 – Prouver qu'une suite est géométrique

Soit $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2}$. Montrer que (u_n) est géométrique ; préciser la raison et le premier terme.

Exercice 10 – Dépréciation d'une voiture

Une voiture achetée 20 000 € perd 20 % de sa valeur chaque année. On note v_n sa valeur après n années. Exprimer v_n en fonction de n et calculer v_3.

Exercice 11 – Somme géométrique

Calculer $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^6$.

Exercice 12 – Somme à partir de u₀

Soit (u_n) géométrique avec $u_0 = 2$, $q = 3$. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$.

Exercice 13 – Capital placé

On place 1000 € à 4% par an. Quelle somme après 5 ans ?

Exercice 14 – Somme de puissances de 2

Calculer $S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 1\,024$.

Exercice 15 – La légende de l'échiquier

Selon la légende, l'inventeur des échecs demanda 1 grain de riz sur la première case, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième, et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64^{e} case. Combien de grains au total ? Donner un ordre de grandeur.

Exercice 16 – Type bac : seuil (décroissance)

Soit (u_n) géométrique avec $u_0 = 500$, $q = 0{,}8$. À partir de quel rang a-t-on $u_n < 50$?

Exercice 17 – Type bac : doublement

Une bactérie double toutes les heures, départ 100 bactéries. Au bout de combien d'heures dépasse-t-on 10000 bactéries ?

Exercice 18 – Type bac : somme et limite

Soit (u_n) géométrique avec $u_0 = 1$, $q = \dfrac{1}{3}$. Calculer $S_n = u_0 + \cdots + u_n$, puis sa limite quand $n \to +\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Type bac : évolutions successives

Un prix baisse de 10% la première année, puis encore de 10% chaque année. Après combien d'années le prix est-il inférieur à la moitié du prix initial ?

Exercice 20 – Type bac : suite auxiliaire géométrique

Soit (u_n) définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3$. On pose $v_n = u_n - 6$.

1. Montrer que (v_n) est géométrique.

2. En déduire v_n, puis u_n, en fonction de n.

3. Vers quelle valeur u_n semble-t-elle se stabiliser ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des termes

On multiplie par $q = 3$ à chaque étape.

$u_1 = 2 \times 3 = 6$; $u_2 = 6 \times 3 = 18$; $u_3 = 18 \times 3 = 54$.

Réponse. $u_1 = 6$, $u_2 = 18$, $u_3 = 54$.

Rappel de cours. Suite géométrique : $u_{n+1} = q \times u_n$. On multiplie toujours par la même raison.

Correction de l'exercice 2 – Reconnaître une suite géométrique

On calcule les rapports : $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{12}{6} = 2$, $\frac{24}{12} = 2$.

Le rapport est constant (= 2) : la suite est géométrique de raison $q = 2$.

Réponse. Oui, géométrique de raison $q = 2$.

Rappel de cours. Une suite est géométrique si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Correction de l'exercice 3 – Raison depuis l'expression

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 2^{n+1}}{5 \times 2^n} = 2^{n+1-n} = 2.$$

Le rapport est constant = 2 : suite géométrique de raison $q = 2$.

Réponse. Géométrique de raison $q = 2$.

Rappel de cours. Une suite de la forme $u_n = a \times q^n$ est géométrique de raison q.

Correction de l'exercice 4 – Raison négative

On multiplie par $-\frac{1}{2}$ à chaque étape : $u_1 = -2$, $u_2 = 1$, $u_3 = -\frac{1}{2}$.

Les termes changent de signe à chaque rang : la suite n'est ni croissante ni décroissante.

Réponse. $u_1 = -2$, $u_2 = 1$, $u_3 = -\frac{1}{2}$; suite non monotone.

Rappel de cours. Une suite géométrique de raison négative alterne les signes.

Correction de l'exercice 5 – Formule explicite

Formule explicite : $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 2^n$.

$u_6 = 5 \times 2^6 = 5 \times 64 = 320$.

Réponse. $u_n = 5 \times 2^n$; $u_6 = 320$.

Rappel de cours. Formule explicite : $u_n = u_0 \times q^n$.

Correction de l'exercice 6 – Raison < 1

$u_n = 80 \times 0{,}5^n$, donc $u_3 = 80 \times 0{,}5^3 = 80 \times 0{,}125 = 10$.

$u_0 > 0$ et $0 < q < 1$: la suite est décroissante (les termes diminuent vers 0).

Réponse. $u_3 = 10$; suite décroissante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Avec $u_0 > 0$: $q > 1$ croissante, $0 < q < 1$ décroissante, $q = 1$ constante.

Correction de l'exercice 7 – Raison depuis deux termes

$u_2 = u_0 \times q^2$, donc $27 = 3q^2$, soit $q^2 = 9$.

Les termes sont positifs, donc $q = 3$ (on écarte $q = -3$).

Réponse. $q = 3$.

Rappel de cours. $u_n = u_p \times q^{n-p}$. Ici $q^2 = \frac{u_2}{u_0}$; on choisit le signe selon les termes.

Correction de l'exercice 8 – Évolution en pourcentage

Augmenter de 5% revient à multiplier par 1,05 : $P_{n+1} = 1{,}05 \times P_n$.

C'est une suite géométrique de raison $q = 1{,}05$.

Réponse. $P_{n+1} = 1{,}05\,P_n$: géométrique de raison 1,05.

Rappel de cours. $+t\%$ ⇒ multiplier par $1 + \frac{t}{100}$; $-t\%$ ⇒ multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

Correction de l'exercice 9 – Prouver qu'une suite est géométrique

Tous les termes sont non nuls. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+2}/2}{3^{n+1}/2} = \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} = 3$.

Le quotient est constant : la suite est géométrique de raison 3, de premier terme $u_0 = \frac{3}{2}$.

Réponse. Géométrique de raison 3, $u_0 = \frac{3}{2}$.

Rappel de cours. (u_n) (à termes non nuls) est géométrique ⇔ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Correction de l'exercice 10 – Dépréciation d'une voiture

Perdre 20 %, c'est multiplier par 0,8 : $v_{n+1} = 0{,}8v_n$. La suite est géométrique de raison 0,8.

$v_n = 20\,000 \times 0{,}8^n$ et $v_3 = 20\,000 \times 0{,}512 = 10\,240$ €.

Réponse. $v_n = 20\,000 \times 0{,}8^n$; $v_3 = 10\,240$ €.

Rappel de cours. Une évolution de t % par période donne une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$.

Erreur fréquente. Après 3 ans, la perte n'est pas 60 % mais $1 - 0{,}512 = 48{,}8$ %.

Correction de l'exercice 11 – Somme géométrique

Somme géométrique de raison $q = 3$, 7 termes (de 3^0 à 3^6).

$S = \frac{1 - q^7}{1 - q} = \frac{1 - 3^7}{1 - 3} = \frac{1 - 2187}{-2} = \frac{-2186}{-2} = 1093$.

Réponse. $S = 1093$.

Rappel de cours. Somme géométrique ($q \neq 1$, n termes) : (1er terme) $\times \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Correction de l'exercice 12 – Somme à partir de u_0

6 termes (de u_0 à u_5). $S = u_0 \times \frac{1 - q^6}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$3^6 = 729$, donc $S = 2 \times \dfrac{1 - 729}{-2} = 2 \times \dfrac{-728}{-2} = 2 \times 364 = 728$.

Réponse. $S = 728$.

Rappel de cours. De u_0 à u_5 : 6 termes, donc exposant 6 dans $1 - q^6$.

Correction de l'exercice 13 – Capital placé

Le capital suit $C_n = 1000 \times 1{,}04^n$ (géométrique de raison 1,04).

$C_5 = 1000 \times 1{,}04^5 \approx 1000 \times 1{,}2167 = 1216{,}65$ €.

Réponse. Environ 1216,65 € après 5 ans.

Rappel de cours. Intérêts composés : $C_n = C_0 \times (1 + \frac{t}{100})^n$.

Correction de l'exercice 14 – Somme de puissances de 2

Ce sont les termes 2^1 à 2^{10} : 10 termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2.

$S = \text{premier terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} = 2 \times \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2 \times 1\,023 = 2\,046$.

Réponse. $S = 2\,046$.

Rappel de cours. $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ pour $q \neq 1$.

Correction de l'exercice 15 – La légende de l'échiquier

Sur la case k (de 1 à 64) il y a 2^{k-1} grains : $1 + 2 + \cdots + 2^{63}$, 64 termes de raison 2.

Total $= \dfrac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1$.

$2^{10} \approx 10^3$, donc $2^{64} = 2^4 \times (2^{10})^6 \approx 16 \times 10^{18}$. Plus précisément $2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \times 10^{19}$.

Réponse. $2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \times 10^{19}$ grains, bien plus que toute la production mondiale de riz.

Rappel de cours. Une croissance géométrique dépasse très vite l'intuition.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : seuil (décroissance)

$u_n = 500 \times 0{,}8^n$. On résout $500 \times 0{,}8^n < 50$, soit $0{,}8^n < 0{,}1$.

On applique ln : $n \ln(0{,}8) < \ln(0{,}1)$. $\ln(0{,}8) < 0$, donc $n > \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}8)} \approx 10{,}3$.

Premier entier : $n = 11$.

Réponse. $u_n < 50$ à partir de $n = 11$.

Rappel de cours. Seuil $q^n < a$ $(0 < q < 1)$: passer au ln et diviser par $\ln(q) < 0$ inverse l'inégalité.

Erreur fréquente. Inverser le sens en divisant par $\ln(0{,}8) < 0$, et prendre l'entier supérieur.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : doublement

$N_n = 100 \times 2^n$. On résout $100 \times 2^n > 10000$, soit $2^n > 100$.

$n \ln(2) > \ln(100)$, donc $n > \dfrac{\ln(100)}{\ln(2)} \approx \dfrac{4{,}605}{0{,}693} \approx 6{,}64$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Premier entier : $n = 7$ heures.

Réponse. On dépasse 10000 au bout de 7 heures.

Rappel de cours. Croissance géométrique : seuil par ln. Ici $\ln(2) > 0$, donc le sens de l'inégalité est conservé.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : somme et limite

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{1 - 1/3} = \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{2/3} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Quand $n \to +\infty$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \to 0$ (car $0 < \frac{1}{3} < 1$).

Donc $S_n \to \frac{3}{2}$.

Réponse. $S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \to \frac{3}{2}$.

Rappel de cours. Pour $-1 < q < 1$, la somme $1 + q + q^2 + \cdots$ converge vers $\frac{1}{1-q}$.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : évolutions successives

Baisser de 10% = multiplier par 0,9. Après n ans, le prix vaut $P_0 \times 0{,}9^n$. On cherche $0{,}9^n < 0{,}5$.

$n \ln(0{,}9) < \ln(0{,}5)$. $\ln(0{,}9) < 0$, donc $n > \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9)} \approx \dfrac{-0{,}693}{-0{,}105} \approx 6{,}58$.

Premier entier : $n = 7$ ans.

Réponse. Le prix passe sous la moitié au bout de 7 ans.

Rappel de cours. Des baisses successives identiques se modélisent par une suite géométrique $0{,}9^n$, pas par une simple soustraction.

Erreur fréquente. Dix baisses de 10% ne font PAS −100% : chaque baisse s'applique au prix déjà réduit (effet multiplicatif).

Correction de l'exercice 20 – Type bac : suite auxiliaire géométrique

1) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0{,}5u_n + 3 - 6 = 0{,}5u_n - 3 = 0{,}5(u_n - 6) = 0{,}5v_n$. (v_n) est géométrique de raison 0,5.

2) $v_0 = u_0 - 6 = 4$, donc $v_n = 4 \times 0{,}5^n$ et $u_n = v_n + 6 = 6 + 4 \times 0{,}5^n$.

3) $0{,}5^n$ devient aussi petit qu'on veut quand n grandit ($0{,}5^{10} \approx 0{,}001$) : u_n se rapproche de 6.

Réponse. $v_n = 4 \times 0{,}5^n$, $u_n = 6 + 4 \times 0{,}5^n$, qui tend vers 6.

Rappel de cours. Pour $u_{n+1} = au_n + b$, on étudie $v_n = u_n - \ell$ où ℓ vérifie $\ell = a\ell + b$ (ici $\ell = 6$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).