Tableau de variation — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

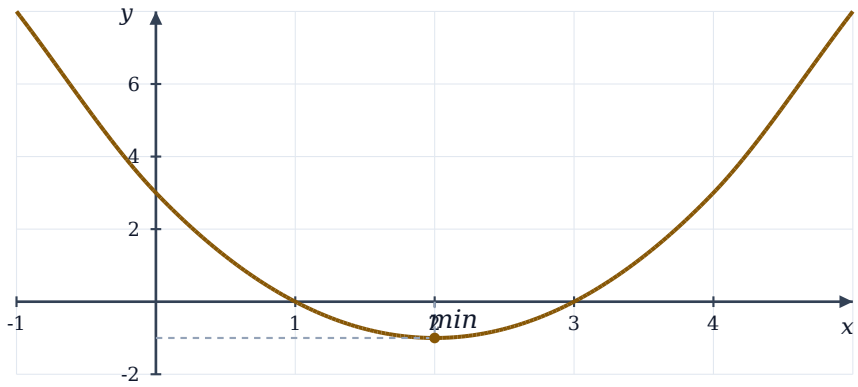
Présentation

Pour dresser le tableau de variation d'une fonction, on calcule $f'(x)$, on étudie son signe, puis on en déduit les variations de f (croissante là où $f' > 0$, décroissante là où $f' < 0$) et ses extremums. Ces exercices corrigés couvrent l'étude du signe de f', les tableaux complets, les extremums et la lecture graphique. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/tableau-de-variation

Exercice 1 – Variations d'une parabole

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et donner les variations de f.



Exercice 2 – Signe de f′ donné

On sait que $f'(x) > 0$ sur $]-\infty ; 1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]1 ; +\infty[$. Donner les variations de f et la nature de l'extremum en 1.

Exercice 3 – Extremum d'une fonction

Soit $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. Déterminer l'abscisse de l'extremum et préciser sa nature.

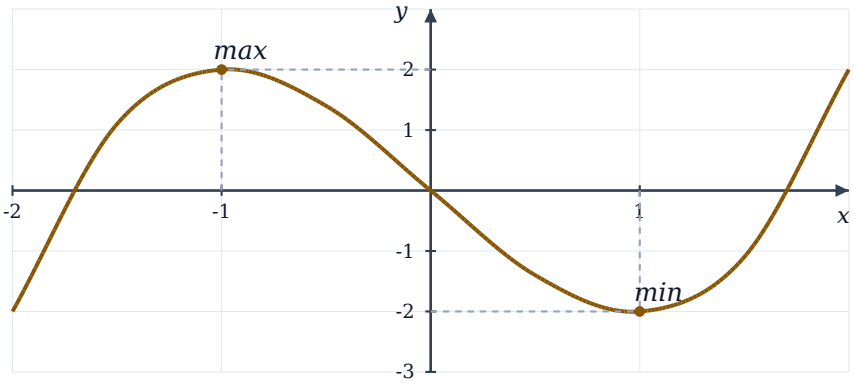
Exercice 4 – Lire extremums et variations

Une fonction f est définie sur $[-2 ; 5]$. Elle est croissante sur $[-2 ; 1]$, de $f(-2) = -3$ à $f(1) = 4$, puis décroissante sur $[1 ; 5]$ jusqu'à $f(5) = 0$. Donner son maximum, son minimum, et le signe de f'.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Tableau d'une fonction cube

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation.



Exercice 6 – Variations d'un quotient

Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ sur $]3;+\infty[$, avec $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-3)^2}$. Donner les variations.

Exercice 7 – Variations sur un intervalle

Soit $f(x) = x^2 - 2x$ sur $[0;3]$. Dresser le tableau de variation et donner les valeurs aux bornes.

Exercice 8 – Une fonction homographique toujours croissante

Soit $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ sur $]-2\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

Exercice 9 – Tableau complet d'une fonction cubique

Soit $f(x) = x^3 - 12x + 1$ sur $[-3\,;3]$. Dresser son tableau de variation avec les valeurs, puis donner ses extremums.

Exercice 10 – Maximum d'un produit

Soit $f(x) = x(6-x)$ sur $[0;6]$. Déterminer le maximum de f.

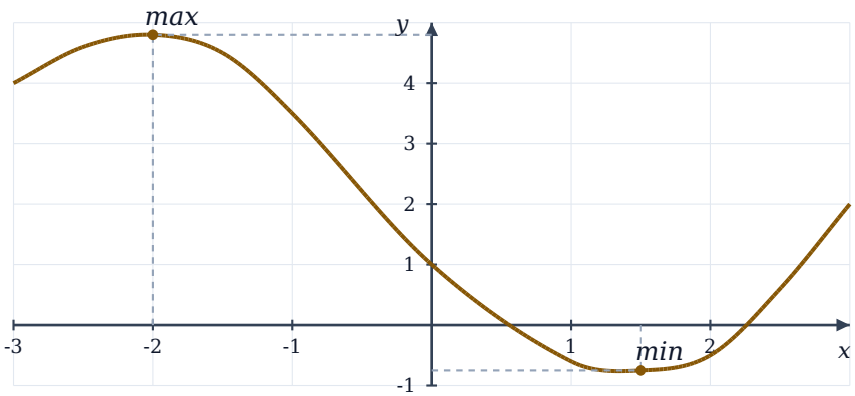
Exercice 11 – Variations avec dérivée factorisée

La dérivée d'une fonction f est $f'(x) = (x-1)(x-4)$. Donner les variations de f.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Lecture graphique d'un tableau

À partir de la courbe ci-dessous, dresser le tableau de variation de f sur $[-3;3]$ en indiquant les extremums.



Exercice 13 – Variations de x³ + x

Soit $f(x) = x^3 + x$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 – Minimum de x + 4/x

Soit $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Étudier ses variations et montrer que $f(x) \geq 4$ pour tout $x > 0$.

Exercice 15 – Démontrer une inégalité par une étude de fonction

Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x^3 \geq 3x - 2$.

Exercice 16 – Type bac : étude complète

Soit $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. 1) Calculer et factoriser $f'(x)$. 2) Dresser le tableau de variation.

Exercice 17 – Type bac : extremum et paramètre

Soit $f(x) = x^2 - 2mx + 1$. Pour quelle valeur de m le minimum de f est-il atteint en $x = 3$?

Exercice 18 – Type bac : optimisation d'un volume

On fabrique une boîte sans couvercle à partir d'un carton carré de 12 cm de côté, en découpant un carré de côté x à chaque coin. Le volume est $V(x) = x(12 - 2x)^2$ pour $x \in]0;6[$. Déterminer x maximisant le volume.

Exercice 19 – Type bac : tableau et nombre de solutions

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$, de maximum local $f(-1) = 3$ et minimum local $f(1) = -1$. Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Type bac : la canette la plus économique

Une canette cylindrique doit contenir 330 cm^3. On note r son rayon et h sa hauteur (en cm). On veut minimiser la surface de métal $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

1. Exprimer h en fonction de r, puis montrer que $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$.

2. Calculer $S'(r)$ et montrer que S est minimale pour $r = \sqrt[3]{\dfrac{165}{\pi}}$.

3. Donner des valeurs approchées de r, h et de la surface minimale. Que remarque-t-on ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Variations d'une parabole

$f'(x) = 2x - 4$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $f'(x) < 0$ si $x < 2$, $f'(x) > 0$ si $x > 2$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$.

Minimum en $x = 2$: $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$ (cohérent avec le graphique).

Réponse. f décroît puis croît ; minimum $f(2) = -1$.

Rappel de cours. Variations à partir du signe de f' : $f' < 0$ (décroissante), $f' > 0$ (croissante). Le minimum est au sommet.

Correction de l'exercice 2 – Signe de f′ donné

$f' > 0$ avant 1 : f croissante sur $]-\infty ; 1]$. $f' < 0$ après : f décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

f croît puis décroît : $x = 1$ est un maximum.

Réponse. f croît puis décroît ; maximum en $x = 1$.

Rappel de cours. Le signe de f' se lit directement en variations. Croissante puis décroissante ⇒ maximum.

Correction de l'exercice 3 – Extremum d'une fonction

$f'(x) = -2x + 6$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

$f' > 0$ avant 3, $f' < 0$ après : f croît puis décroît, donc $x = 3$ est un maximum.

$f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$.

Réponse. Maximum $f(3) = 4$ en $x = 3$.

Rappel de cours. Un extremum est atteint là où f' s'annule en changeant de signe.

Correction de l'exercice 4 – Lire extremums et variations

Maximum : 4, atteint en $x = 1$ (sommet du tableau).

Minimum : on compare les valeurs « basses » $f(-2) = -3$ et $f(5) = 0$. Le minimum est -3, atteint en $x = -2$.

$f'(x) \geq 0$ sur $[-2 ; 1]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[1 ; 5]$ (si f est dérivable, $f'(1) = 0$).

Réponse. Maximum 4 en 1, minimum -3 en -2.

Rappel de cours. Le minimum sur un intervalle fermé peut être atteint à une borne : il faut comparer les valeurs aux bornes.

Correction de l'exercice 5 – Tableau d'une fonction cube

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Racines -1 et 1 ; $a = 3 > 0$: $f' > 0$ à l'extérieur, $f' < 0$ entre.

f croît sur $]-\infty ; -1]$, décroît sur $[-1 ; 1]$, croît sur $[1 ; +\infty[$.

Maximum local $f(-1) = -1 + 3 = 2$; minimum local $f(1) = 1 - 3 = -2$ (voir graphique).

Réponse. Max local $f(-1) = 2$, min local $f(1) = -2$.

Rappel de cours. On factorise f' pour lire son signe, puis on traduit en variations. Les

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

extremums correspondent aux changements de signe de f'.

Correction de l'exercice 6 – Variations d'un quotient

$(x-3)^2 > 0$ et $-7 < 0$, donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \neq 3$.

f est strictement décroissante sur $]3;+\infty[$.

Réponse. f est décroissante sur $]3;+\infty[$.

Rappel de cours. Pas besoin de calculer f' si l'énoncé le donne : on étudie juste son signe.

Correction de l'exercice 7 – Variations sur un intervalle

$f'(x) = 2x - 2$, nulle en 1. $f' < 0$ sur $[0;1[$, $f' > 0$ sur $]1;3]$: minimum en 1.

$f(0) = 0$, $f(1) = 1 - 2 = -1$ (minimum), $f(3) = 9 - 6 = 3$.

f décroît de 0 à -1 sur $[0;1]$, croît de -1 à 3 sur $[1;3]$.

Réponse. Min $f(1) = -1$; $f(0) = 0$, $f(3) = 3$.

Rappel de cours. Sur un intervalle fermé, on indique aussi les valeurs aux bornes dans le tableau.

Correction de l'exercice 8 – Une fonction homographique toujours croissante

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+2) - (x-1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Numérateur $3 > 0$, dénominateur > 0 : $f'(x) > 0$ sur $]-2\,;+\infty[$.

Réponse. f est strictement croissante sur $]-2\,;+\infty[$.

Rappel de cours. $f' > 0$ sur un intervalle $\Rightarrow$ f strictement croissante sur cet intervalle.

Correction de l'exercice 9 – Tableau complet d'une fonction cubique

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$, positif à l'extérieur de -2 et 2, négatif entre.

f est croissante sur $[-3\,;-2]$, décroissante sur $[-2\,;2]$, croissante sur $[2\,;3]$.

Valeurs : $f(-3) = -27 + 36 + 1 = 10$, $f(-2) = -8 + 24 + 1 = 17$, $f(2) = 8 - 24 + 1 = -15$, $f(3) = 27 - 36 + 1 = -8$.

Maximum : $\max(17\,;-8) = 17$ en -2. Minimum : $\min(10\,;-15) = -15$ en 2.

Réponse. Maximum 17 en $x = -2$, minimum -15 en $x = 2$.

Rappel de cours. Sur un intervalle fermé, on compare extremums locaux et valeurs aux bornes.

Correction de l'exercice 10 – Maximum d'un produit

$f(x) = 6x - x^2$, donc $f'(x) = 6 - 2x$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

$f' > 0$ sur $[0;3[$, $f' < 0$ sur $]3;6]$: maximum en $x = 3$.

$f(3) = 3 \times 3 = 9$.

Réponse. Maximum $f(3) = 9$ en $x = 3$.

Rappel de cours. On développe le produit avant de dériver. Le maximum d'un produit $x(6-x)$ est au milieu, en $x = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Variations avec dérivée factorisée

f' est un trinôme de racines 1 et 4, coefficient dominant > 0 : positif à l'extérieur, négatif entre.

$f' > 0$ sur $]-\infty;1[$, $f' < 0$ sur $]1;4[$, $f' > 0$ sur $]4;+\infty[$.

f croît sur $]-\infty;1]$, décroît sur $[1;4]$, croît sur $[4;+\infty[$: maximum local en 1, minimum local en 4.

Réponse. f croît, décroît sur $[1;4]$, puis croît ; max en 1, min en 4.

Rappel de cours. Le signe de f' (trinôme factorisé) donne directement les variations, sans recalculer.

Correction de l'exercice 12 – Lecture graphique d'un tableau

La courbe monte jusqu'à $x = -2$, puis descend jusqu'à $x = 1{,}5$, puis remonte.

f est croissante sur $[-3;-2]$, décroissante sur $[-2;1{,}5]$, croissante sur $[1{,}5;3]$.

Maximum local en $x = -2$ (valeur $\approx 4{,}8$) ; minimum local en $x = 1{,}5$ (valeur $\approx -0{,}75$).

Réponse. Croissante, max en -2, décroissante, min en 1,5, croissante.

Rappel de cours. Lecture graphique : la courbe « monte » ⇒ croissante ; « descend » ⇒ décroissante. Les sommets sont les extremums.

Correction de l'exercice 13 – Variations de x³ + x

$f'(x) = 3x^2 + 1$.

$3x^2 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 1 > 0$ pour tout x.

f' est strictement positive : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Réponse. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Rappel de cours. Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, f y est strictement croissante. Pas besoin de racines ici.

Correction de l'exercice 14 – Minimum de x + 4/x

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

Sur $]0\,;+\infty[$, $x + 2 > 0$ et $x^2 > 0$: f' a le signe de $x - 2$.

f décroît sur $]0\,;2]$ et croît sur $[2\,;+\infty[$. Son minimum est $f(2) = 2 + 2 = 4$.

Donc $f(x) \geq 4$ pour tout $x > 0$, avec égalité en $x = 2$.

Réponse. Minimum 4 en $x = 2$: $x + \frac{4}{x} \geq 4$.

Rappel de cours. Démontrer une inégalité $f(x) \geq m$ revient souvent à montrer que m est le minimum de f.

Correction de l'exercice 15 – Démontrer une inégalité par une étude de fonction

On pose $g(x) = x^3 - 3x + 2$ et on montre que $g(x) \geq 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Sur $[0\,;+\infty[$, $x + 1 > 0$: g' a le signe de $x - 1$.

g décroît sur $[0\,;1]$ et croît sur $[1\,;+\infty[$. Minimum : $g(1) = 1 - 3 + 2 = 0$.

Donc $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $x^3 \geq 3x - 2$, avec égalité pour $x = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $g(x) = x^3 - 3x + 2$ a pour minimum 0 sur $[0\,;+\infty[$: l'inégalité est démontrée.

Rappel de cours. Pour comparer deux expressions, on étudie le signe de leur différence.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : étude complète

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$.

Racines 1 et 2, coefficient > 0 : $f' > 0$ à l'extérieur, $f' < 0$ entre.

f croît sur $]-\infty;1]$, décroît sur $[1;2]$, croît sur $[2;+\infty[$.

Maximum local $f(1) = 2 - 9 + 12 = 5$; minimum local $f(2) = 16 - 36 + 24 = 4$.

Réponse. $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$; max local $f(1) = 5$, min local $f(2) = 4$.

Rappel de cours. Factoriser f' (mettre le coefficient en facteur puis utiliser le discriminant) est l'étape clé pour le tableau.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : extremum et paramètre

$f'(x) = 2x - 2m$. Le minimum est en x tel que $f'(x) = 0$, soit $x = m$.

On veut ce minimum en $x = 3$: $m = 3$.

Réponse. $m = 3$.

Rappel de cours. L'abscisse de l'extremum d'une parabole $x^2 - 2mx + 1$ est $x = m$ (le sommet). On l'égale à la valeur voulue.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : optimisation d'un volume

On développe : $V(x) = x(144 - 48x + 4x^2) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6)$.

Sur $]0;6[$, $V' > 0$ sur $]0;2[$, $V' < 0$ sur $]2;6[$: maximum en $x = 2$.

$V(2) = 2 \times (12-4)^2 = 2 \times 64 = 128$ cm^3.

Réponse. Volume maximal 128 cm^3 pour $x = 2$ cm.

Rappel de cours. Optimisation : exprimer la grandeur, dériver, étudier le signe de la dérivée, lire le maximum. On garde la racine dans l'intervalle de définition.

Erreur fréquente. La racine $x = 6$ est exclue (hors de $]0;6[$ et volume nul) : seul $x = 2$ convient.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : tableau et nombre de solutions

f croît jusqu'à $f(-1) = 3 > 0$, décroît jusqu'à $f(1) = -1 < 0$, puis recroît vers $+\infty$.

Sur $]-\infty;-1]$: f passe de $-\infty$ à 3, traverse 0 une fois. Sur $[-1;1]$: de 3 à -1, traverse 0 une fois. Sur $[1;+\infty[$: de -1 à $+\infty$, traverse 0 une fois.

Au total, $f(x) = 0$ admet 3 solutions.

Réponse. L'équation $f(x) = 0$ a 3 solutions.

Rappel de cours. Le tableau de variation, avec le signe des extremums, permet de compter les solutions de $f(x) = k$ (une par intervalle de monotonie traversant k).

Correction de l'exercice 20 – Type bac : la canette la plus économique

1) Volume $\pi r^2 h = 330$, donc $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$ et $2\pi r h = \dfrac{660}{r}$. D'où $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2) $S'(r) = 4\pi r - \dfrac{660}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 660}{r^2}$. Le signe est celui de $4\pi r^3 - 660$, qui s'annule pour $r^3 = \dfrac{165}{\pi}$.

S' est négative avant cette valeur et positive après (r^3 est croissante) : S est minimale en $r_0 = \sqrt[3]{165/\pi}$.

3) $r_0 \approx 3{,}74$ cm, $h = \dfrac{330}{\pi r_0^2} \approx 7{,}49$ cm, $S_{\min} \approx 264$ cm^2.

On remarque $h \approx 2r$: la canette optimale est aussi haute que large. (Les vraies canettes sont plus hautes, pour des raisons de prise en main.)

Réponse. $r \approx 3{,}74$ cm, $h \approx 7{,}49$ cm $= 2r$, surface minimale ≈ 264 cm^2.

Rappel de cours. Optimisation : exprimer la grandeur avec une seule variable, dériver, étudier le signe, conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).