Équation de tangente — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$: sa pente est le nombre dérivé $f'(a)$ et elle passe par le point $(a\,;f(a))$. Ces exercices corrigés couvrent l'écriture d'une tangente, les tangentes horizontales ou parallèles à une droite, et la position courbe/tangente type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/tangente

Exercice 1 – Tangente : formule de base

Soit $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$. Donner l'équation de la tangente en $a = 1$.

Exercice 2 – Tangente d'un polynôme

Soit $f(x) = x^2 - 3x$, $f'(x) = 2x - 3$. Tangente en $a = 2$?

Exercice 3 – Tangente à l'origine

Soit $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$. Donner la tangente en $a = 0$.

Exercice 4 – Tangente à la fonction racine

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, dérivable sur $]0\,;+\infty[$ avec $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Déterminer la tangente en $a = 4$.

Exercice 5 – Tangente avec fonction inverse

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Tangente en $a = 1$?

Exercice 6 – Coordonnées du point de contact

Soit $f(x) = x^2 + 1$, $f'(x) = 2x$. La tangente en $a = -1$; donner le point de contact et la pente.

Exercice 7 – Tangente horizontale

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $f'(x) = 2x - 4$. En quel point la tangente est-elle horizontale ?

Exercice 8 – De f(a) et f'(a) à la tangente

On sait que $f(2) = 3$ et $f'(2) = -1$. Donner l'équation de la tangente en 2 et ses points d'intersection avec les axes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Tangente à une fonction quotient

Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$, puis déterminer la tangente en $a = 3$.

Exercice 10 – Tangente parallèle à une droite

Soit $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$. Trouver le point où la tangente est parallèle à la droite $y = 4x - 1$.

Exercice 11 – Plusieurs tangentes parallèles

Soit $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$. En quels points la tangente a-t-elle pour pente 3 ?

Exercice 12 – Tangente et calcul d'ordonnée

Soit $f(x) = x^2 - 2x$, $f'(x) = 2x - 2$. Donner la tangente en $a = 3$, puis l'ordonnée du point de cette tangente d'abscisse 0.

Exercice 13 – Position courbe/tangente

Soit $f(x) = x^2$ et sa tangente en 0 : $y = 0$. Étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 14 – Tangentes de pente donnée

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Déterminer les points de la courbe où la tangente est parallèle à la droite $y = 9x$, et donner les équations de ces tangentes.

Exercice 15 – Approximation affine d'une racine

À l'aide de la tangente en 4 à la courbe de $f(x) = \sqrt{x}$, donner une valeur approchée de $\sqrt{4{,}1}$. Comparer à la calculatrice.

Exercice 16 – Type bac : position avec étude de signe

Soit $f(x) = x^3$, tangente en 1 : $y = 3x - 2$. Étudier la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exercice 17 – Type bac : tangente passant par un point

Soit $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$. Déterminer les tangentes à la courbe passant par le point $A(0\,;-1)$.

Exercice 18 – Type bac : tangente commune à deux courbes

Montrer que la droite $y = 2x - 1$ est tangente à la courbe de $f(x) = x^2$ et préciser le point de contact.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Type bac : exponentielle (tangente)

Soit $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$. Donner l'équation de la tangente en 0, puis en déduire une inégalité.

Exercice 20 – Type bac : retrouver les coefficients

Soit $f(x) = ax^2 + bx$, où a et b sont des réels. La tangente à sa courbe au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 3x - 1$. Déterminer a et b.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Tangente : formule de base

Formule : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$f'(1) = 2$, $f(1) = 1$: $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

Réponse. $y = 2x - 1$.

Rappel de cours. Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. $f'(a)$ = pente, $f(a)$ = ordonnée du point de contact.

Correction de l'exercice 2 – Tangente d'un polynôme

$f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$ et $f(2) = 4 - 6 = -2$.

$y = 1 \times (x - 2) + (-2) = x - 4$.

Réponse. $y = x - 4$.

Rappel de cours. On calcule $f'(a)$ et $f(a)$, puis on remplace dans la formule.

Correction de l'exercice 3 – Tangente à l'origine

$f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$.

$y = 0 \times (x - 0) + 0 = 0$: la tangente est l'axe des abscisses.

Réponse. $y = 0$ (axe des abscisses).

Rappel de cours. Une pente nulle donne une tangente horizontale. Ici elle passe par l'origine, donc $y = 0$.

Correction de l'exercice 4 – Tangente à la fonction racine

$f(4) = 2$ et $f'(4) = \dfrac{1}{2 \times 2} = \dfrac{1}{4}$.

$y = f'(4)(x - 4) + f(4) = \frac{1}{4}(x - 4) + 2 = \frac{1}{4}x + 1$.

Réponse. T:$y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

Rappel de cours. Tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Correction de l'exercice 5 – Tangente avec fonction inverse

$f'(1) = -1$ et $f(1) = 1$.

$y = -1(x - 1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2$.

Réponse. $y = -x + 2$.

Rappel de cours. Même méthode pour toute fonction : il suffit de connaître $f'(a)$ et $f(a)$.

Correction de l'exercice 6 – Coordonnées du point de contact

Point de contact : $(a\,;f(a)) = (-1\,;f(-1)) = (-1\,;2)$.

Pente : $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$.

Réponse. Point de contact $(-1\,;2)$, pente -2.

Rappel de cours. Le point de contact a pour coordonnées $(a; f(a))$, la pente est $f'(a)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Tangente horizontale

Tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

$f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$. Tangente horizontale au point $(2\,;-3)$, d'équation $y = -3$.

Réponse. Au point $(2\,;-3)$, tangente $y = -3$.

Rappel de cours. Tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(a) = 0$. C'est souvent un extremum.

Correction de l'exercice 8 – De f(a) et f'(a) à la tangente

$y = -1 \times (x - 2) + 3 = -x + 5$.

Avec l'axe des ordonnées : $x = 0$, $y = 5$, point $(0\,;5)$. Avec l'axe des abscisses : $-x + 5 = 0$, point $(5\,;0)$.

Réponse. $y = -x + 5$; elle coupe les axes en $(0\,;5)$ et $(5\,;0)$.

Rappel de cours. Il suffit de connaître $f(a)$ et $f'(a)$ pour écrire la tangente, même sans l'expression de f.

Correction de l'exercice 9 – Tangente à une fonction quotient

Quotient $\frac{u}{v}$ avec $u = x + 1$, $v = x - 1$, $u' = v' = 1$: $f'(x) = \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

$f(3) = \frac{4}{2} = 2$ et $f'(3) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

$y = -\frac{1}{2}(x - 3) + 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Réponse. T:$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

Rappel de cours. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Correction de l'exercice 10 – Tangente parallèle à une droite

Parallèle à $y = 4x - 1 \Leftrightarrow$ même pente 4, donc $f'(a) = 4$.

$2a = 4 \Rightarrow a = 2$. $f(2) = 4$, tangente au point $(2\,;4)$.

Équation : $y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$.

Réponse. Point $(2\,;4)$, tangente $y = 4x - 4$.

Rappel de cours. Tangente parallèle à une droite de pente m : résoudre $f'(a) = m$.

Correction de l'exercice 11 – Plusieurs tangentes parallèles

$f'(a) = 3 \Leftrightarrow 3a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

Deux points : $(1\,;1)$ et $(-1\,;-1)$.

Réponse. Aux points $(1\,;1)$ et $(-1\,;-1)$.

Rappel de cours. L'équation $f'(a) = m$ peut avoir plusieurs solutions : il y a alors plusieurs tangentes de même pente.

Correction de l'exercice 12 – Tangente et calcul d'ordonnée

$f'(3) = 4$, $f(3) = 9 - 6 = 3$. Tangente : $y = 4(x - 3) + 3 = 4x - 9$.

Pour $x = 0$: $y = 4 \times 0 - 9 = -9$.

Réponse. Tangente $y = 4x - 9$; ordonnée en $x = 0$: -9.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Une fois la tangente écrite, on l'utilise comme une droite ordinaire pour calculer des valeurs.

Correction de l'exercice 13 – Position courbe/tangente

On étudie le signe de $f(x) - y = x^2 - 0 = x^2$.

$x^2 \geq 0$ pour tout x : la courbe est au-dessus de sa tangente (contact en 0).

Réponse. La courbe est au-dessus de la tangente $y = 0$ ($x^2 \geq 0$).

Rappel de cours. Position courbe/tangente : on étudie le signe de $f(x) -$ (équation tangente). Positif = courbe au-dessus.

Correction de l'exercice 14 – Tangentes de pente donnée

$f'(x) = 3x^2 - 3$. Tangente parallèle à $y = 9x \Leftrightarrow f'(a) = 9 \Leftrightarrow 3a^2 = 12 \Leftrightarrow a = 2$ ou $a = -2$.

En $a = 2$: $f(2) = 8 - 6 = 2$, tangente $y = 9(x - 2) + 2 = 9x - 16$.

En $a = -2$: $f(-2) = -8 + 6 = -2$, tangente $y = 9(x + 2) - 2 = 9x + 16$.

Réponse. Aux points $(2\,;2)$ et $(-2\,;-2)$; tangentes $y = 9x - 16$ et $y = 9x + 16$.

Rappel de cours. Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur : on résout $f'(a) = m$.

Correction de l'exercice 15 – Approximation affine d'une racine

La tangente en 4 est $y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$ ($f(4) = 2$, $f'(4) = \frac{1}{4}$).

Près de 4, la courbe est très proche de sa tangente : $\sqrt{4{,}1} \approx \frac{1}{4} \times 0{,}1 + 2 = 2{,}025$.

Calculatrice : $\sqrt{4{,}1} \approx 2{,}02485$. L'erreur est d'environ 0,00015.

Réponse. $\sqrt{4{,}1} \approx 2{,}025$.

Rappel de cours. Approximation affine : $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\,h$ pour h proche de 0.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : position avec étude de signe

On étudie $g(x) = f(x) - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2$.

$x = 1$ est racine ($1 - 3 + 2 = 0$). On factorise :
$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2(x + 2)$.

$(x - 1)^2 \geq 0$, donc $g(x)$ a le signe de $x + 2$: négatif si $x < -2$, positif si $x > -2$.

La courbe est en dessous de la tangente sur $]-\infty; -2[$, au-dessus sur $]-2; +\infty[$ (contact en 1).

Réponse. $g(x) = (x - 1)^2(x + 2)$: courbe en dessous pour $x < -2$, au-dessus pour $x > -2$.

Rappel de cours. L'abscisse de contact a est racine double de $f(x) -$ (tangente) : on factorise par $(x - a)^2$.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : tangente passant par un point

Tangente en a : $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$.

Elle passe par $A(0; -1)$: $-1 = 2a \times 0 - a^2 = -a^2$, donc $a^2 = 1$, $a = \pm 1$.

$a = 1$: $y = 2x - 1$. $a = -1$: $y = -2x - 1$.

Réponse. Deux tangentes : $y = 2x - 1$ et $y = -2x - 1$.

Rappel de cours. On écrit la tangente en un point inconnu a, puis on impose le passage

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

par le point donné : équation en a.

Erreur fréquente. $A(0;-1)$ n'est pas sur la courbe : le point de contact a est à déterminer, ce n'est pas $x = 0$.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : tangente commune à deux courbes

Contact ⇔ la droite touche la courbe en un point unique : $x^2 = 2x - 1$, soit $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$.

Racine double $x = 1$: il y a bien un contact unique, donc tangence. Le point de contact est $(1\,;1)$.

On vérifie : $f'(1) = 2$ = pente de la droite. ✓

Réponse. La droite est tangente en $(1\,;1)$ (racine double, et $f'(1) = 2$).

Rappel de cours. Tangence ⇔ le système courbe/droite donne une racine double (discriminant nul).

Correction de l'exercice 19 – Type bac : exponentielle (tangente)

$f'(0) = e^0 = 1$, $f(0) = 1$: tangente $y = 1 \times (x - 0) + 1 = x + 1$.

On étudie $g(x) = e^x - x - 1$: $g'(x) = e^x - 1$, négative pour $x < 0$ et positive pour $x > 0$ (car $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$).

g admet donc un minimum en 0, égal à $g(0) = 0$: $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x. La courbe est au-dessus de sa tangente en 0.

Réponse. Tangente $y = x + 1$; on en déduit $e^x \geq x + 1$.

Rappel de cours. La tangente à exp en 0 est $y = x + 1$: inégalité fondamentale $e^x \geq x + 1$, réutilisée tout au long du lycée.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : retrouver les coefficients

La tangente en 1 passe par le point de contact : $f(1) = 3 \times 1 - 1 = 2$, donc $a + b = 2$.

Son coefficient directeur est $f'(1)$. Or $f'(x) = 2ax + b$, donc $f'(1) = 2a + b = 3$.

En soustrayant : $(2a + b) - (a + b) = 1$, donc $a = 1$, puis $b = 1$.

Vérification : $f(x) = x^2 + x$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, tangente $y = 3(x - 1) + 2 = 3x - 1$.

Réponse. $a = 1$, $b = 1$: $f(x) = x^2 + x$.

Rappel de cours. Une équation de tangente donne deux informations : $f(a)$ (point de contact) et $f'(a)$ (pente).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).