Trigonométrie — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Sur le cercle trigonométrique, un angle se mesure en radians : un tour complet vaut 2π. Le cosinus et le sinus d'un angle sont les coordonnées du point associé. Ces exercices corrigés couvrent radians, valeurs remarquables, cercle trigonométrique, équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$, formules de symétrie et lecture de la courbe du cosinus. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/trigonometrie

Exercice 1 – Conversion degrés → radians

Convertir en radians : 180°, 90°, 60°.

Exercice 2 – Conversion radians → degrés

Convertir en degrés : $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 3 – Valeurs remarquables

Donner $\cos 0$, $\sin 0$, $\cos\frac{\pi}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 – Longueur d'un arc

Sur un cercle de rayon 5 cm, quelle est la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de $\frac{2\pi}{5}$ radians ? Et pour un angle de 1 radian ?

Exercice 5 – Valeurs remarquables (suite)

Donner $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{6}$.

Exercice 6 – Relation fondamentale

Sachant $\cos x = \frac{3}{5}$ avec $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, calculer $\sin x$.

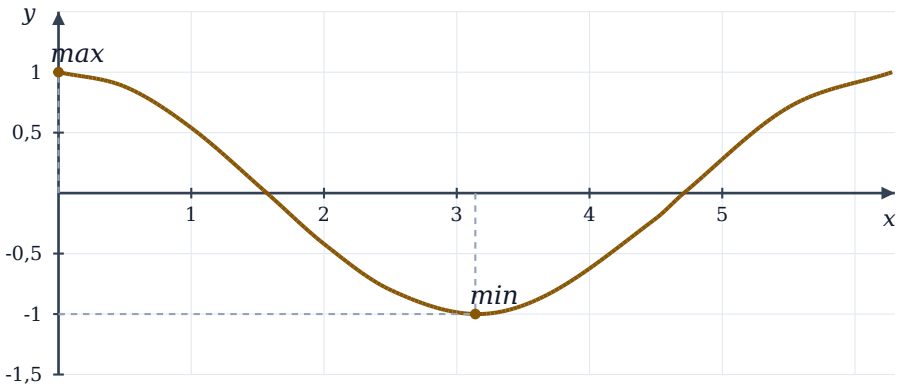
Exercice 7 – Cosinus d'angles opposés

Sachant $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donner $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (avec $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Lecture de la courbe du cosinus

La courbe ci-dessous est celle de la fonction $x \mapsto \cos x$ sur $[0\,;2\pi]$. Lire son maximum, son minimum et la valeur en 0. En quelle valeur de x le minimum est-il atteint ?



Exercice 9 – Mesure principale

Donner la mesure principale (dans $]-\pi\,;\pi]$) de $\dfrac{7\pi}{3}$ et de $-\dfrac{5\pi}{4}$.

Exercice 10 – Cosinus et sinus d'angles non remarquables en apparence

Donner les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{6}$, $\sin\dfrac{5\pi}{6}$, $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Exercice 11 – Équation cos x = valeur remarquable

Résoudre $\cos x = \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi[$.

Exercice 12 – Équation sin x = valeur remarquable

Résoudre $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;2\pi[$.

Exercice 13 – Angles associés

Sachant $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, donner $\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)$, c'est-à-dire $\cos\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 14 – Simplifier avec les angles associés

Simplifier $A = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

Exercice 15 – Résoudre 2 sin x + 1 = 0

Résoudre $2\sin x + 1 = 0$ dans $]-\pi\,;\pi]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Type bac : équation cos x = a (cas négatif)

Résoudre $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0\,;2\pi[$.

Exercice 17 – Type bac : calcul avec la relation fondamentale

Sachant $\sin x = -\dfrac{12}{13}$ avec $x \in \left]\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right[$, calculer $\cos x$.

Exercice 18 – Type bac : positions sur le cercle

Placer sur le cercle trigonométrique les angles $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$ et donner les coordonnées $(\cos\,;\sin)$ des points correspondants.

Exercice 19 – Type bac : équation factorisée

Résoudre $(2\cos x - 1)(\sin x) = 0$ sur $[0\,;2\pi[$.

Exercice 20 – Type bac : l'expression cos(2x)

Soit $f(x) = \cos(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(-x) = f(x)$ et que $f(x+\pi) = f(x)$ pour tout réel x.

2. Résoudre $f(x) = 0$ sur $[0\,;2\pi[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Conversion degrés → radians

180° correspond à π radians (un demi-tour).

$90° = \frac{180°}{2}$ correspond à $\frac{\pi}{2}$.

$60° = \frac{180°}{3}$ correspond à $\frac{\pi}{3}$.

Réponse. $180° = \pi$; $90° = \frac{\pi}{2}$; $60° = \frac{\pi}{3}$.

Rappel de cours. Conversion : $180° = \pi$ rad. Règle de proportionnalité : $\text{rad} = \text{deg} \times \frac{\pi}{180}$.

Correction de l'exercice 2 – Conversion radians → degrés

π rad $= 180°$, donc $\frac{\pi}{4} = \frac{180°}{4} = 45°$.

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \times 180°}{3} = 120°$.

Réponse. $\frac{\pi}{4} = 45°$; $\frac{2\pi}{3} = 120°$.

Rappel de cours. $\text{deg} = \text{rad} \times \frac{180}{\pi}$.

Correction de l'exercice 3 – Valeurs remarquables

$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ (point $(1\,;0)$ sur le cercle).

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ (point $(0\,;1)$).

Réponse. $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Rappel de cours. cos = abscisse, sin = ordonnée du point du cercle trigonométrique.

Correction de l'exercice 4 – Longueur d'un arc

Longueur d'arc = rayon × angle en radians : $\ell = 5 \times \frac{2\pi}{5} = 2\pi \approx 6{,}28$ cm.

Pour 1 radian : $\ell = 5$ cm, soit exactement le rayon.

Réponse. $2\pi \approx 6{,}28$ cm ; 5 cm pour 1 rad.

Rappel de cours. Un radian est l'angle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon : $\ell = r\theta$.

Correction de l'exercice 5 – Valeurs remarquables (suite)

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Réponse. $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Valeurs à connaître par cœur : $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ donnent $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$ pour le cosinus (décroissant).

Correction de l'exercice 6 – Relation fondamentale

Relation fondamentale : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

$\sin x = \pm\frac{4}{5}$. Comme $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq 0$, donc $\sin x = \frac{4}{5}$.

Réponse. $\sin x = \frac{4}{5}$.

Rappel de cours. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Le signe se choisit selon le quadrant (ici sin ≥ 0).

Correction de l'exercice 7 – Cosinus d'angles opposés

cos est une fonction paire : $\cos(-x) = \cos x$, donc $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

sin est impaire : $\sin(-x) = -\sin x$, donc $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Réponse. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Rappel de cours. $\cos(-x) = \cos x$ (paire) ; $\sin(-x) = -\sin x$ (impaire).

Correction de l'exercice 8 – Lecture de la courbe du cosinus

Le maximum de cos est 1 (atteint en $x = 0$ et $x = 2\pi$).

Le minimum est -1, atteint au creux de la courbe, en $x = \pi \approx 3{,}14$.

La valeur en 0 se lit $\cos 0 = 1$.

Réponse. Max = 1, min = -1 (en $x = \pi$), et $\cos 0 = 1$.

Rappel de cours. La fonction cosinus oscille entre -1 et 1, de période 2π. Maximum en 0, minimum en π.

Correction de l'exercice 9 – Mesure principale

On ajoute ou retranche des multiples de 2π (un tour) pour revenir dans $]-\pi\,;\pi]$.

$\frac{7\pi}{3} - 2\pi = \frac{7\pi - 6\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{-5\pi + 8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Réponse. $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Rappel de cours. Deux mesures d'un même angle orienté diffèrent d'un multiple de 2π.

Correction de l'exercice 10 – Cosinus et sinus d'angles non remarquables en apparence

$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$: symétrique de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à l'axe des ordonnées. $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

$-\frac{2\pi}{3}$ est le symétrique de $\frac{2\pi}{3}$ par rapport à l'axe des abscisses : même cosinus, sinus opposé.

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rappel de cours. $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$.

Correction de l'exercice 11 – Équation cos x = valeur remarquable

$\cos x = \frac{1}{2}$ correspond à l'angle de référence $\frac{\pi}{3}$ (car $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$).

Sur $[0; 2\pi[$, le cosinus vaut $\frac{1}{2}$ en $x = \frac{\pi}{3}$ et en $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ (symétrie par rapport à l'axe des abscisses).

Réponse. $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

Rappel de cours. $\cos x = \cos a$ donne $x = a$ ou $x = -a$ (modulo 2π). Sur $[0; 2\pi[$, la 2e solution est $2\pi - a$.

Correction de l'exercice 12 – Équation sin x = valeur remarquable

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc l'angle de référence est $\frac{\pi}{4}$.

Le sinus vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (positif) dans les deux premiers quadrants : $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Réponse. $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$.

Rappel de cours. $\sin x = \sin a$ donne $x = a$ ou $x = \pi - a$ (modulo 2π).

Correction de l'exercice 13 – Angles associés

Formule : $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Réponse. $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Rappel de cours. Angles associés : $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

Correction de l'exercice 14 – Simplifier avec les angles associés

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

$\cos(\pi + x) = -\cos x$ (symétrie par rapport à l'origine).

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ (symétrie par rapport à la première bissectrice).

$A = -\cos x - \cos x + \cos x = -\cos x$.

Réponse. $A = -\cos x$.

Rappel de cours. Les formules des angles associés se retrouvent en plaçant x sur le cercle trigonométrique et en cherchant la symétrie.

Correction de l'exercice 15 – Résoudre 2 sin x + 1 = 0

$\sin x = -\frac{1}{2}$. On connaît $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, donc $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Sur le cercle, deux points ont pour ordonnée $-\frac{1}{2}$: $-\frac{\pi}{6}$ et son symétrique par rapport à

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

l'axe des ordonnées, $-\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$.

Réponse. $S = \left\langle -\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} \right\rangle$.

Rappel de cours. $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = \pi - a$ (à 2π près).

Erreur fréquente. Ne pas oublier la seconde solution, symétrique de la première.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : équation cos x = a (cas négatif)

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc l'angle dont le cosinus vaut $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ est lié à $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (car $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}$).

Les solutions sur $[0; 2\pi[$ sont $x = \frac{5\pi}{6}$ et son symétrique $x = 2\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.

Réponse. $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$.

Rappel de cours. Pour $\cos x = -c$, on cherche d'abord l'angle de référence (où cos = c), puis on utilise $\cos(\pi - a) = -\cos a$.

Erreur fréquente. Un cosinus négatif correspond aux angles du « côté gauche » du cercle (entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$).

Correction de l'exercice 17 – Type bac : calcul avec la relation fondamentale

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$, donc $\cos x = \pm\frac{5}{13}$.

Sur $\left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$ (3^{e} quadrant), le cosinus est négatif.

Donc $\cos x = -\frac{5}{13}$.

Réponse. $\cos x = -\frac{5}{13}$.

Rappel de cours. On calcule $\cos^2 x$ par la relation fondamentale, puis on choisit le signe selon le quadrant de x.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : positions sur le cercle

$\frac{\pi}{2}$ (quart de tour) : point $(0\,;1)$, donc $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

π (demi-tour) : point $(-1\,;0)$, donc $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$.

$\frac{3\pi}{2}$ (trois quarts de tour) : point $(0\,;-1)$, donc $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$.

Réponse. $\frac{\pi}{2} \to (0;1)$; $\pi \to (-1;0)$; $\frac{3\pi}{2} \to (0;-1)$.

Rappel de cours. Les coordonnées d'un point du cercle sont $(\cos\theta\,;\sin\theta)$. Les axes correspondent aux multiples de $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : équation factorisée

Un produit est nul si l'un des facteurs l'est : $2\cos x - 1 = 0$ ou $\sin x = 0$.

$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ (sur $[0; 2\pi[$).

Réponse. $x \in \left\langle 0\,; \frac{\pi}{3}\,; \pi\,; \frac{5\pi}{3} \right\rangle$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Équation produit en trigonométrie : on annule chaque facteur séparément, puis on réunit les solutions.

Correction de l’exercice 20 – Type bac : l’expression cos(2x)

1) $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$: les points associés à $2x$ et $-2x$ sont symétriques par rapport à l’axe des abscisses. $f(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x) = f(x)$: ajouter 2π, c’est faire un tour complet.

2) $\cos X = 0 \Leftrightarrow X = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Avec $X = 2x$: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Dans $[0\,;2\pi[$: $k = 0, 1, 2, 3$ donnent $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

Réponse. $f(-x) = f(x)$ et $f(x+\pi) = f(x)$; $S = \left\langle \frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\,;\frac{5\pi}{4}\,;\frac{7\pi}{4} \right\rangle$.

Rappel de cours. Quand l’angle est $2x$, on résout en $X = 2x$ puis on divise par 2 : les solutions sont deux fois plus nombreuses sur un tour.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).