Variables aléatoires — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Modéliser un gain, une durée ou un score par un nombre, c'est définir une variable aléatoire. En Première, tout part du tableau de la loi de probabilité : une ligne de valeurs x_i, une ligne de probabilités dont la somme fait 1. L'espérance $E(X)$ s'en déduit comme une moyenne pondérée — c'est le gain moyen si l'on rejouait un très grand nombre de fois —, puis la variance $V(X)$ et l'écart-type mesurent la dispersion autour d'elle. Ces exercices corrigés vont du remplissage d'une loi aux jeux équitables et aux transformations affines, en expliquant chaque étape.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/variables-aleatoires

Exercice 1 – Vérifier une loi

X prend les valeurs $0, 1, 2$ avec $P(X=0)=0{,}3$, $P(X=1)=0{,}5$, $P(X=2)=p$. Déterminer p.

Exercice 2 – Calculer une espérance

Avec $P(X=0)=0{,}3$, $P(X=1)=0{,}5$, $P(X=2)=0{,}2$, calculer $E(X)$.

Exercice 3 – Espérance d'un gain

À un jeu, on gagne $+4$ € avec proba 0,25 et -1 € avec proba 0,75. Calculer l'espérance de gain.

Exercice 4 – Nombre de « Face » en deux lancers

On lance deux fois une pièce équilibrée. X est le nombre de « Face » obtenus. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 5 – Construire une loi

On lance un dé équilibré à 6 faces. Soit X le nombre obtenu. Donner la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 6 – Loi à partir d'un tirage

Une urne contient 3 boules « 2 €» et 2 boules « 5 €». On tire une boule, soit X le gain. Donner la loi de X.

Exercice 7 – Espérance d'un tirage

Avec la loi précédente ($P(X=2)=\frac{3}{5}$, $P(X=5)=\frac{2}{5}$), calculer $E(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Lire et exploiter une loi

X prend les valeurs -2, 0, 1, 3 avec les probabilités 0,1, 0,3, 0,4, 0,2. Calculer $P(X \geq 1)$, $P(X < 1)$ et $E(X)$.

Exercice 9 – Nombre de boules rouges, sans remise

Une urne contient 3 boules rouges et 2 bleues. On tire deux boules successivement sans remise. X est le nombre de boules rouges obtenues. Donner la loi de X et $E(X)$.

Exercice 10 – Variance par la définition

Avec $P(X = 0) = 0{,}3$, $P(X = 1) = 0{,}5$, $P(X = 2) = 0{,}2$ et $E(X) = 0{,}9$, calculer $V(X)$ par la définition.

Exercice 11 – Variance par König-Huygens

Reprendre la loi précédente et calculer $V(X)$ par la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Exercice 12 – Écart-type

Sachant $V(X) = 0{,}49$, calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 13 – Gain net d'un jeu

Un jeu coûte 2 € la partie. On gagne 6 € avec proba 0,3, rien sinon. Soit G le gain net. Calculer $E(G)$.

Exercice 14 – Même espérance, risques différents

Jeu A : on gagne 10 € ou on perd 10 €, avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Jeu B : on gagne 1 € ou on perd 1 €, avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Comparer les espérances, puis les variances. Interpréter.

Exercice 15 – Type bac : mise équitable

Un jeu rapporte 10 € avec proba 0,2 et 0 € sinon. Quelle mise m rend le jeu équitable ?

Exercice 16 – Type bac : transformation affine

On pose $Y = 3X + 2$ avec $E(X) = 0{,}9$ et $V(X) = 0{,}49$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 17 – Type bac : loi avec paramètre

X prend les valeurs $-1, 0, 1$ avec $P(X = -1) = a$, $P(X = 0) = 0{,}5$, $P(X = 1) = a$. 1) Déterminer a. 2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : décision par l'espérance

Une loterie vend 1000 tickets à 2 € chacun. Il y a un lot de 800 € et un lot de 200 €. Soit G le gain net d'un joueur. Calculer $E(G)$ et conclure.

Exercice 19 – Type bac : prime d'assurance

Un assureur fait payer 300 € par an. Pour un client, il rembourse 5 000 € avec une probabilité de 0,02, 1 000 € avec une probabilité de 0,1, et rien sinon. On note G le gain de l'assureur pour un client.

1. Donner la loi de G.

2. Calculer $E(G)$ et l'interpréter.

3. Quelle prime faudrait-il fixer pour que le gain moyen soit de 50 € par client ?

Exercice 20 – Type bac : le plus grand de deux dés

On lance deux dés équilibrés. X est le plus grand des deux résultats.

1. Calculer $P(X \leq k)$ pour $k \in \{1, \ldots, 6\}$.

2. En déduire que $P(X = k) = \dfrac{2k-1}{36}$.

3. Calculer $E(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Vérifier une loi

La somme des probabilités vaut 1 : $0{,}3 + 0{,}5 + p = 1$, donc $p = 0{,}2$.

Réponse. $p = 0{,}2$.

Rappel de cours. Dans une loi de probabilité, $\sum_i P(X = x_i) = 1$.

Correction de l'exercice 2 – Calculer une espérance

$E(X) = \sum_i x_i\, p_i = 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}2 = 0 + 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9$.

Réponse. $E(X) = 0{,}9$.

Rappel de cours. Espérance : $E(X) = \sum_i x_i\, p_i$, moyenne des valeurs pondérée par leurs probabilités.

Correction de l'exercice 3 – Espérance d'un gain

$E(X) = 4 \times 0{,}25 + (-1) \times 0{,}75 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$.

$E(X) > 0$: le jeu est favorable au joueur.

Réponse. $E(X) = 0{,}25$ € : favorable au joueur.

Rappel de cours. $E(X) > 0$ favorable, $= 0$ équitable, < 0 défavorable.

Correction de l'exercice 4 – Nombre de « Face » en deux lancers

Issues équiprobables : *PP*, *PF*, *FP*, *FF*.

$P(X = 0) = \frac{1}{4}$ (*PP*), $P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (*PF*, *FP*), $P(X = 2) = \frac{1}{4}$ (*FF*).

$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$.

Réponse. Loi : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; $E(X) = 1$.

Rappel de cours. $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$.

Correction de l'exercice 5 – Construire une loi

Chaque valeur de 1 à 6 a la probabilité $\frac{1}{6}$.

$E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3{,}5$.

Réponse. Loi uniforme $\frac{1}{6}$; $E(X) = 3{,}5$.

Rappel de cours. Loi uniforme : toutes les issues ont la même probabilité. L'espérance d'un dé équilibré est 3,5.

Correction de l'exercice 6 – Loi à partir d'un tirage

5 boules au total. $P(X = 2) = \frac{3}{5}$; $P(X = 5) = \frac{2}{5}$.

Vérification : $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$. ✓

Réponse. $P(X = 2) = \frac{3}{5}$, $P(X = 5) = \frac{2}{5}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. La probabilité d'une valeur = nombre de cas favorables / nombre total de cas.

Correction de l'exercice 7 – Espérance d'un tirage

$E(X) = 2 \times \frac{3}{5} + 5 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} + \frac{10}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2.$

Réponse. $E(X) = 3{,}2$ €.

Rappel de cours. $E(X)$ représente le gain moyen attendu en répétant l'expérience un grand nombre de fois.

Correction de l'exercice 8 – Lire et exploiter une loi

$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6.$

$P(X < 1) = 1 - P(X \geq 1) = 0{,}4$ (contraire).

$E(X) = -2 \times 0{,}1 + 0 + 1 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}2 = -0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}6 = 0{,}8.$

Réponse. $P(X \geq 1) = 0{,}6$, $P(X < 1) = 0{,}4$, $E(X) = 0{,}8$.

Rappel de cours. $\{X < 1\}$ est le contraire de $\{X \geq 1\}$.

Correction de l'exercice 9 – Nombre de boules rouges, sans remise

$P(X = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ (deux bleues).

$P(X = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ (deux rouges).

$P(X = 1) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10}.$

$E(X) = 0 + 1 \times 0{,}6 + 2 \times 0{,}3 = 1{,}2.$

Réponse. $P(X = 0) = 0{,}1$, $P(X = 1) = 0{,}6$, $P(X = 2) = 0{,}3$; $E(X) = 1{,}2$.

Rappel de cours. Pour la dernière valeur, on peut utiliser que la somme des probabilités vaut 1 (puis vérifier par l'arbre : $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{10}$).

Correction de l'exercice 10 – Variance par la définition

$V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i.$

$= 0{,}3(0 - 0{,}9)^2 + 0{,}5(1 - 0{,}9)^2 + 0{,}2(2 - 0{,}9)^2.$

$= 0{,}3 \times 0{,}81 + 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}2 \times 1{,}21 = 0{,}243 + 0{,}005 + 0{,}242 = 0{,}49.$

Réponse. $V(X) = 0{,}49$.

Rappel de cours. Variance (définition) : $V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i$.

Correction de l'exercice 11 – Variance par König-Huygens

$E(X^2) = 0^2 \times 0{,}3 + 1^2 \times 0{,}5 + 2^2 \times 0{,}2 = 0 + 0{,}5 + 0{,}8 = 1{,}3.$

$V(X) = 1{,}3 - 0{,}9^2 = 1{,}3 - 0{,}81 = 0{,}49$ (cohérent).

Réponse. $V(X) = 0{,}49$.

Rappel de cours. König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, souvent plus rapide.
$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i$.

Erreur fréquente. Ne pas confondre $E(X^2)$ et $E(X)^2$: leur différence est justement la variance.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Écart-type

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$.

Réponse. $\sigma(X) = 0{,}7$.

Rappel de cours. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$: même unité que X, plus parlant pour la dispersion.

Correction de l'exercice 13 – Gain net d'un jeu

Gain net : $6 - 2 = 4$ € (proba 0,3) ou $0 - 2 = -2$ € (proba 0,7).

$E(G) = 4 \times 0{,}3 + (-2) \times 0{,}7 = 1{,}2 - 1{,}4 = -0{,}2$.

Réponse. $E(G) = -0{,}2$ € : jeu défavorable au joueur.

Rappel de cours. Le gain net retranche la mise à chaque issue.

Correction de l'exercice 14 – Même espérance, risques différents

$E(A) = 10 \times \frac{1}{2} - 10 \times \frac{1}{2} = 0$ et $E(B) = 0$: en moyenne, aucun jeu ne rapporte ni ne coûte.

$V(A) = \frac{1}{2}(10 - 0)^2 + \frac{1}{2}(-10 - 0)^2 = 100$, $\sigma_A = 10$. $V(B) = 1$, $\sigma_B = 1$.

Le jeu A est bien plus risqué : ses gains s'écartent beaucoup plus de la moyenne.

Réponse. Espérances égales (0) ; $V(A) = 100$, $V(B) = 1$: A est plus risqué.

Rappel de cours. L'espérance mesure la valeur moyenne ; la variance et l'écart type mesurent la dispersion, c'est-à-dire le risque.

Correction de l'exercice 15 – Type bac : mise équitable

Gain net : $10 - m$ (proba 0,2) ou $-m$ (proba 0,8).

$E(G) = (10 - m) \times 0{,}2 + (-m) \times 0{,}8 = 2 - 0{,}2m - 0{,}8m = 2 - m$.

Équitable : $E(G) = 0 \Leftrightarrow m = 2$ €.

Réponse. Mise équitable $m = 2$ € (= E du gain brut = $10 \times 0{,}2$).

Rappel de cours. Jeu équitable $\Leftrightarrow E(\text{gain net}) = 0 \Leftrightarrow$ mise = $E(\text{gain brut})$.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : transformation affine

$E(3X + 2) = 3E(X) + 2 = 3 \times 0{,}9 + 2 = 4{,}7$.

$V(3X + 2) = 3^2 V(X) = 9 \times 0{,}49 = 4{,}41$.

Réponse. $E(Y) = 4{,}7$; $V(Y) = 4{,}41$.

Rappel de cours. $E(aX + b) = aE(X) + b$; $V(aX + b) = a^2 V(X)$ (la constante b disparaît).

Erreur fréquente. Pour la variance, le coefficient passe au carré et le +2 disparaît : $V(3X + 2) = 9V(X)$.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : loi avec paramètre

Somme = 1 : $a + 0{,}5 + a = 1$, donc $2a = 0{,}5$, $a = 0{,}25$.

$E(X) = -1 \times 0{,}25 + 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}25 = 0$.

$E(X^2) = 1 \times 0{,}25 + 0 + 1 \times 0{,}25 = 0{,}5$. $V(X) = 0{,}5 - 0^2 = 0{,}5$.

Réponse. $a = 0{,}25$; $E(X) = 0$; $V(X) = 0{,}5$.

Rappel de cours. On trouve le paramètre par $\sum p_i = 1$, puis on applique $E(X)$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

König-Huygens.

Correction de l’exercice 18 – Type bac : décision par l’espérance

Un ticket gagne 800 € avec proba $\frac{1}{1000}$, 200 € avec proba $\frac{1}{1000}$, 0 sinon. Gain net = gain -2.

Espérance du gain brut : $800 \times \frac{1}{1000} + 200 \times \frac{1}{1000} = 0{,}8 + 0{,}2 = 1$ €.

$E(G) = 1 - 2 = -1$ €. En moyenne, chaque joueur perd 1 € : la loterie est défavorable au joueur (favorable à l’organisateur).

Réponse. $E(G) = -1$ € : jeu défavorable au joueur.

Rappel de cours. Espérance du gain net = espérance du gain brut − mise. Un $E(G) < 0$ profite à l’organisateur.

Correction de l’exercice 19 – Type bac : prime d’assurance

1) $G = 300 -$ remboursement : $G = -4\,700$ avec $P = 0{,}02$, $G = -700$ avec $P = 0{,}1$, $G = 300$ avec $P = 0{,}88$.

2) $E(G) = -4\,700 \times 0{,}02 - 700 \times 0{,}1 + 300 \times 0{,}88 = -94 - 70 + 264 = 100$. Sur un grand nombre de clients, l’assureur gagne en moyenne 100 € par client.

3) Remboursement moyen : $5\,000 \times 0{,}02 + 1\,000 \times 0{,}1 = 200$ €. Avec une prime p, $E(G) = p - 200 = 50 \Leftrightarrow p = 250$ €.

Réponse. $E(G) = 100$ € ; prime de 250 € pour un gain moyen de 50 €.

Rappel de cours. $E(a - X) = a - E(X)$: on peut raisonner sur le remboursement moyen.

Correction de l’exercice 20 – Type bac : le plus grand de deux dés

1) $X \leq k$ signifie que les deux dés donnent au plus k : $k \times k$ issues sur 36. $P(X \leq k) = \frac{k^2}{36}$.

2) $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}$.

Contrôle : $\frac{1+3+5+7+9+11}{36} = \frac{36}{36} = 1$.

3) $E(X) = \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11}{36} = \frac{161}{36} \approx 4{,}47$.

Réponse. $P(X = k) = \frac{2k-1}{36}$ et $E(X) = \frac{161}{36} \approx 4{,}47$.

Rappel de cours. Passer par $P(X \leq k)$ (fonction de répartition) simplifie souvent le calcul de la loi d’un maximum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).