Variables aléatoires — Première spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Modéliser un gain, une durée ou un score par un nombre, c'est définir une variable aléatoire. En Première, tout part du tableau de la loi de probabilité : une ligne de valeurs x_i, une ligne de probabilités dont la somme fait 1. L'espérance $E(X)$ s'en déduit comme une moyenne pondérée — c'est le gain moyen si l'on rejouait un très grand nombre de fois —, puis la variance $V(X)$ et l'écart-type mesurent la dispersion autour d'elle. Ces exercices corrigés vont du remplissage d'une loi aux jeux équitables et aux transformations affines, en expliquant chaque étape.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-specialite/variables-aleatoires

Exercice 1 – Vérifier une loi

X prend les valeurs $0, 1, 2$ avec $P(X = 0) = 0{,}3$, $P(X = 1) = 0{,}5$, $P(X = 2) = p$. Déterminer p.

Exercice 2 – Calculer une espérance

Avec $P(X = 0) = 0{,}3$, $P(X = 1) = 0{,}5$, $P(X = 2) = 0{,}2$, calculer $E(X)$.

Exercice 3 – Espérance d'un gain

À un jeu, on gagne $+4$ € avec proba 0,25 et -1 € avec proba 0,75. Calculer l'espérance de gain.

Exercice 4 – Nombre de « Face » en deux lancers

On lance deux fois une pièce équilibrée. X est le nombre de « Face » obtenus. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 5 – Construire une loi

On lance un dé équilibré à 6 faces. Soit X le nombre obtenu. Donner la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 6 – Loi à partir d'un tirage

Une urne contient 3 boules « 2 €» et 2 boules « 5 €». On tire une boule, soit X le gain. Donner la loi de X.

Exercice 7 – Espérance d'un tirage

Avec la loi précédente ($P(X = 2) = \frac{3}{5}$, $P(X = 5) = \frac{2}{5}$), calculer $E(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Lire et exploiter une loi

X prend les valeurs -2, 0, 1, 3 avec les probabilités 0,1, 0,3, 0,4, 0,2. Calculer $P(X \geq 1)$, $P(X < 1)$ et $E(X)$.

Exercice 9 – Nombre de boules rouges, sans remise

Une urne contient 3 boules rouges et 2 bleues. On tire deux boules successivement sans remise. X est le nombre de boules rouges obtenues. Donner la loi de X et $E(X)$.

Exercice 10 – Variance par la définition

Avec $P(X = 0) = 0{,}3$, $P(X = 1) = 0{,}5$, $P(X = 2) = 0{,}2$ et $E(X) = 0{,}9$, calculer $V(X)$ par la définition.

Exercice 11 – Variance par König-Huygens

Reprendre la loi précédente et calculer $V(X)$ par la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Exercice 12 – Écart-type

Sachant $V(X) = 0{,}49$, calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 13 – Gain net d'un jeu

Un jeu coûte 2 € la partie. On gagne 6 € avec proba 0,3, rien sinon. Soit G le gain net. Calculer $E(G)$.

Exercice 14 – Même espérance, risques différents

Jeu A : on gagne 10 € ou on perd 10 €, avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Jeu B : on gagne 1 € ou on perd 1 €, avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Comparer les espérances, puis les variances. Interpréter.

Exercice 15 – Type bac : mise équitable

Un jeu rapporte 10 € avec proba 0,2 et 0 € sinon. Quelle mise m rend le jeu équitable ?

Exercice 16 – Type bac : transformation affine

On pose $Y = 3X + 2$ avec $E(X) = 0{,}9$ et $V(X) = 0{,}49$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 17 – Type bac : loi avec paramètre

X prend les valeurs $-1, 0, 1$ avec $P(X = -1) = a$, $P(X = 0) = 0{,}5$, $P(X = 1) = a$. 1) Déterminer a. 2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : décision par l'espérance

Une loterie vend 1000 tickets à 2 € chacun. Il y a un lot de 800 € et un lot de 200 €. Soit G le gain net d'un joueur. Calculer $E(G)$ et conclure.

Exercice 19 – Type bac : prime d'assurance

Un assureur fait payer 300 € par an. Pour un client, il rembourse 5 000 € avec une probabilité de 0,02, 1 000 € avec une probabilité de 0,1, et rien sinon. On note G le gain de l'assureur pour un client.

1. Donner la loi de G.

2. Calculer $E(G)$ et l'interpréter.

3. Quelle prime faudrait-il fixer pour que le gain moyen soit de 50 € par client ?

Exercice 20 – Type bac : le plus grand de deux dés

On lance deux dés équilibrés. X est le plus grand des deux résultats.

1. Calculer $P(X \leq k)$ pour $k \in \{1, \ldots, 6\}$.

2. En déduire que $P(X = k) = \dfrac{2k-1}{36}$.

3. Calculer $E(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).