Dérivation — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Dériver, c'est mesurer une variation INSTANTANÉE : la vitesse d'un mobile à un instant précis, le coût du prochain article produit, la pente d'un profil à un point donné. Le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de la tangente au point d'abscisse a — et le signe de la fonction dérivée donne les variations, donc les maximums et les minimums. C'est l'outil d'optimisation le plus employé en STI2D : volume maximal d'un emballage, puissance maximale transmise, production la plus rentable. Ces 20 exercices corrigés vont du calcul de dérivée à l'étude complète d'un polynôme de degré 3, en passant par l'équation de la tangente et les problèmes type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/derivation

Exercice 1 – Du taux de variation au nombre dérivé

Un mobile parcourt $d(t) = t^2$ mètres en t secondes. On s'intéresse à sa vitesse autour de $t = 3$ s.

1. Calcule la vitesse moyenne entre 3 s et 5 s, puis entre 3 s et 3,1 s.

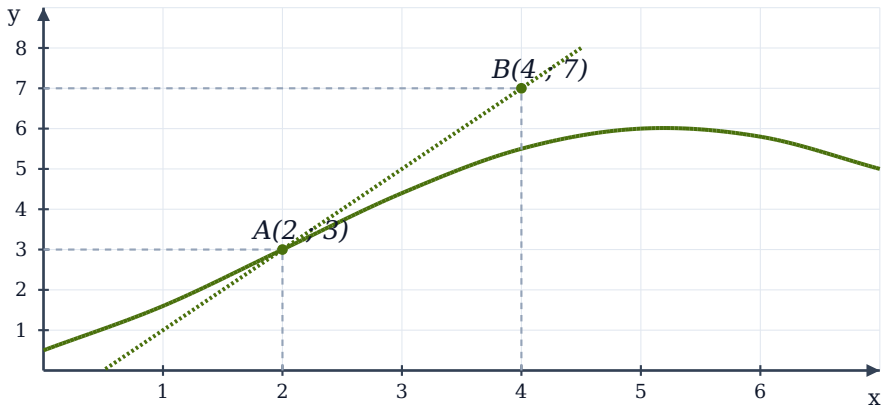
2. Que semblent devenir ces vitesses moyennes quand l'intervalle se resserre ?

Exercice 2 – Lire un nombre dérivé sur un graphique

La courbe représente une fonction f. La tangente au point $A(2\,;3)$ passe aussi par le point $B(4\,;7)$.

1. Détermine $f(2)$ et $f'(2)$.

2. La tangente au point d'abscisse 5 est horizontale. Que vaut $f'(5)$?



Exercice 3 – Les dérivées à connaître

On considère les fonctions $f(x) = 7$, $g(x) = 5x - 3$, $h(x) = x^2$ et $k(x) = x^3$.

1. Donne la fonction dérivée de chacune d'elles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Dériver un polynôme

Dérive les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 5 \qquad g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4 \qquad h(x) = -x^3 + 12x$$

1. Donne $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

Exercice 5 – Calculer et interpréter un nombre dérivé

Le coût de production, en euros, de q pièces est $C(q) = 0{,}5q^2 + 20q + 400$, pour $0 \leq q \leq 100$.

1. Calcule $C'(q)$.

2. Calcule $C'(40)$ et interprète le résultat.

3. Compare avec le coût réel de la 41^{e} pièce.

Exercice 6 – Équation de la tangente

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 7$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Détermine l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 3.

2. Vérifie que le point $A(5\,;8)$ appartient à T.

Exercice 7 – Variations d'un polynôme de degré 2

Soit $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $f'(x)$ et étudie son signe.

2. Dresse le tableau de variations de f.

3. Donne l'extremum de f.

Exercice 8 – Variations d'un polynôme de degré 3

Soit $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $g'(x)$ et vérifie que $g'(x) = 3(x-1)(x-3)$.

2. Dresse le tableau de variations de g.

Exercice 9 – Tangentes horizontales

Soit $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Détermine les abscisses des points où la tangente à la courbe de f est horizontale.

2. Donne les coordonnées de ces points.

Exercice 10 – Approximation affine

Soit $f(x) = x^3$. On veut estimer $f(2{,}02)$ sans calculatrice.

1. Donne l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

2. Utilise-la pour estimer $f(2{,}02)$.

3. Compare avec la valeur exacte $2{,}02^3 = 8{,}242\,408$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Volume maximal d'une boîte

Dans une plaque carrée de 24 cm de côté, on découpe quatre carrés identiques de côté x aux quatre coins, puis on replie les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Justifie que le volume, en cm³, est $V(x) = x(24 - 2x)^2$ et précise le domaine de x.

2. Montre que $V'(x) = (24 - 2x)(24 - 6x)$.

3. Détermine la découpe qui maximise le volume et ce volume maximal.

Exercice 12 – Production la plus rentable

Un atelier produit q pièces par jour ($0 < q \leq 60$). Le coût total, en euros, est $C(q) = 0{,}1q^3 - 6q^2 + 150q$.

1. Exprime le coût moyen $C_m(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ sous forme polynomiale.

2. Détermine la production qui minimise le coût moyen.

3. Calcule ce coût moyen minimal et compare-le au coût marginal en ce point.

Exercice 13 – Vitesse et accélération d'un chariot

Un chariot automatisé se déplace selon $d(t) = -0{,}1t^3 + 1{,}5t^2 + 2t$, où d est la distance en mètres et t le temps en secondes, pour $0 \leq t \leq 10$.

1. Exprime la vitesse $v(t) = d'(t)$.

2. Détermine l'instant où la vitesse est maximale et cette vitesse.

3. Le chariot recule-t-il avant $t = 10$ s ?

Exercice 14 – Étude complète d'un polynôme de degré 3

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur l'intervalle $[-3\,;6]$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise-la.

2. Dresse le tableau de variations de f sur $[-3\,;6]$.

3. Donne le maximum et le minimum de f sur cet intervalle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

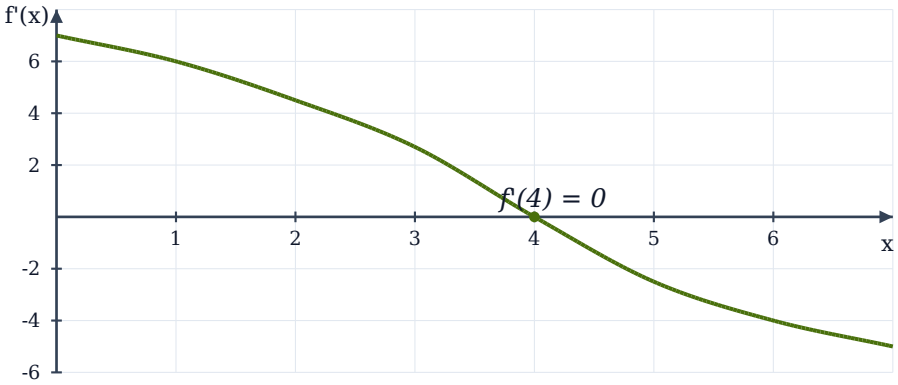
Exercice 15 – Lire les variations sur la courbe de la dérivée

La courbe représentée est celle de la fonction DÉRIVÉE f' d'une fonction f définie sur $[0\,;7]$.

1. Donne le signe de f' sur $[0\,;7]$.

2. En déduire le tableau de variations de f.

3. En quel point la courbe de f admet-elle une tangente horizontale ?



Exercice 16 – Type bac : puissance transmise maximale

Un générateur de force électromotrice 24 V et de résistance interne 2 Ω alimente un circuit. La puissance utile transmise, en watts, s'écrit $P(i) = 24i - 2i^2$, où i est l'intensité en ampères, avec $0 \le i \le 12$.

1. Calcule $P'(i)$.

2. Détermine l'intensité qui maximise la puissance utile, et cette puissance.

3. Pour quelles intensités la puissance utile dépasse-t-elle 64 W ?

Exercice 17 – Type bac : tangente passant par un point donné

Soit $f(x) = x^2$ et $A(0\,;-4)$ un point du plan.

1. Écris l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a, en fonction de a.

2. Détermine les valeurs de a pour lesquelles cette tangente passe par A.

3. Donne les équations des tangentes obtenues.

Exercice 18 – Type bac : profil d'une came

Le profil d'une came est décrit, pour $0 \le x \le 4$, par $h(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$, où h est la hauteur en millimètres.

1. Calcule $h'(x)$ et factorise-la.

2. Dresse le tableau de variations de h sur $[0\,;4]$.

3. Détermine la hauteur maximale et la hauteur minimale du profil, puis l'amplitude du mouvement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Type bac : bénéfice avec un coût cubique

Un atelier fabrique q cartes par jour ($0 \leq q \leq 30$). Le coût total, en euros, est $C(q) = 0{,}1q^3 - 3q^2 + 40q + 100$, et chaque carte est vendue 40 €.

1. Exprime le bénéfice $B(q)$.

2. Détermine la production qui maximise le bénéfice et le bénéfice correspondant.

3. Vérifie qu'en ce point le coût marginal est égal au prix de vente, et explique pourquoi.

Exercice 20 – Type bac : section maximale d'une gouttière

On fabrique une gouttière en pliant à angle droit les deux bords d'une bande de tôle de 30 cm de largeur. On note x la hauteur des bords relevés, en centimètres.

1. Exprime la largeur du fond puis l'aire $A(x)$ de la section, et donne le domaine de x.

2. Calcule $A'(x)$ et détermine la hauteur qui rend la section maximale.

3. Donne cette aire maximale et les dimensions correspondantes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Du taux de variation au nombre dérivé

La vitesse moyenne entre a et b est le taux de variation $\dfrac{d(b)-d(a)}{b-a}$.

$d(3) = 9$ m et $d(5) = 25$ m, donc la vitesse moyenne vaut $\dfrac{25-9}{5-3} = \dfrac{16}{2} = 8$ m/s.

$d(3{,}1) = 9{,}61$ m, donc $\dfrac{9{,}61-9}{0{,}1} = \dfrac{0{,}61}{0{,}1} = 6{,}1$ m/s.

En resserrant encore : entre 3 et 3,01, on obtient $\dfrac{9{,}0601-9}{0{,}01} = 6{,}01$ m/s.

Les vitesses moyennes se rapprochent de 6 : cette valeur limite est le NOMBRE DÉRIVÉ de d en 3, noté $d'(3) = 6$.

Interprétation : à l'instant $t = 3$ s, le mobile avance à 6 m/s. C'est la vitesse INSTANTANÉE, celle qu'afficherait un compteur.

Réponse. 8 m/s entre 3 et 5 s · 6,1 m/s entre 3 et 3,1 s · les taux tendent vers 6 : $d'(3) = 6$ m/s.

Rappel de cours. Taux de variation → vitesse MOYENNE sur un intervalle · nombre dérivé → vitesse INSTANTANÉE en un point.

Erreur fréquente. Diviser par b au lieu de $b - a$: le dénominateur est la DURÉE de l'intervalle, ici 0,1 s et non 3,1 s.

Correction de l'exercice 2 – Lire un nombre dérivé sur un graphique

$f(2)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 2 : $f(2) = 3$.

$f'(2)$ est le COEFFICIENT DIRECTEUR de la tangente en ce point. On le calcule avec deux points de la tangente, $A(2\,;3)$ et $B(4\,;7)$.

Coefficient directeur : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{7-3}{4-2} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Donc $f'(2) = 2$: au point d'abscisse 2, la courbe monte de 2 unités quand x avance de 1.

Une tangente horizontale a un coefficient directeur nul, donc $f'(5) = 0$.

Conséquence importante : une tangente horizontale signale un extremum LOCAL possible (maximum ou minimum). C'est la clé de tous les problèmes d'optimisation.

Réponse. $f(2) = 3$ et $f'(2) = 2$ · $f'(5) = 0$ (tangente horizontale).

Rappel de cours. $f'(a)$ = coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a. Tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(a) = 0$.

Erreur fréquente. Confondre $f(2) = 3$ (une HAUTEUR) et $f'(2) = 2$ (une PENTE). Ce sont deux informations de nature différente.

Correction de l'exercice 3 – Les dérivées à connaître

$f(x) = 7$ est CONSTANTE : sa courbe est une droite horizontale, de pente nulle partout. Donc $f'(x) = 0$.

$g(x) = 5x - 3$ est AFFINE : sa courbe est une droite de coefficient directeur 5, et cette pente est la même partout. Donc $g'(x) = 5$.

$h(x) = x^2$: la formule de référence donne $h'(x) = 2x$. La pente dépend du point : elle est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

négative avant 0, nulle en 0, positive après.

$k(x) = x^3$: la formule donne $k'(x) = 3x^2$. Comme un carré est toujours positif ou nul, la fonction cube est croissante partout.

Contrôle du nombre dérivé de h en 3 : $h'(3) = 6$, ce qui correspond exactement au 6 m/s trouvé par les taux de variation dans le premier exercice ✔.

Réponse. $f'(x) = 0 \cdot g'(x) = 5 \cdot h'(x) = 2x \cdot k'(x) = 3x^2$.

Rappel de cours. $(c)' = 0 \cdot (ax + b)' = a \cdot (x^2)' = 2x \cdot (x^3)' = 3x^2$.

Erreur fréquente. Dériver $5x - 3$ en $5x$: la dérivée d'une constante est 0, donc le -3 DISPARAÎT (il ne reste pas, il ne devient pas $-3x$).

Correction de l'exercice 4 – Dériver un polynôme

On dérive TERME PAR TERME, en gardant les coefficients multiplicatifs.

f : la dérivée de $3x^2$ est $3 \times 2x = 6x$; celle de $-8x$ est -8 ; celle de 5 est 0. Donc $f'(x) = 6x - 8$.

g : la dérivée de $2x^3$ est $2 \times 3x^2 = 6x^2$; celle de $-6x^2$ est $-6 \times 2x = -12x$; celle de 4 est 0. Donc $g'(x) = 6x^2 - 12x$.

h : la dérivée de $-x^3$ est $-3x^2$; celle de $12x$ est 12. Donc $h'(x) = -3x^2 + 12$.

Contrôle de cohérence sur les degrés : la dérivée d'un polynôme de degré 3 est de degré 2, celle d'un polynôme de degré 2 est de degré 1. On perd toujours un degré ✔.

Réponse. $f'(x) = 6x - 8 \cdot g'(x) = 6x^2 - 12x \cdot h'(x) = -3x^2 + 12$.

Rappel de cours. $(u + v)' = u' + v'$ et $(k\,u)' = k\,u'$: la dérivation se fait terme à terme, les coefficients restent devant.

Erreur fréquente. Dériver $-6x^2$ en $-6x$: il faut multiplier par l'exposant, ce qui donne $-12x$.

Correction de l'exercice 5 – Calculer et interpréter un nombre dérivé

$C'(q) = 0{,}5 \times 2q + 20 = q + 20$.

$C'(40) = 40 + 20 = 60$.

Interprétation : au niveau de production de 40 pièces, produire une pièce de plus coûte environ 60 €. C'est le COÛT MARGINAL.

Coût réel de la 41e pièce : $C(41) - C(40)$.

$C(40) = 0{,}5 \times 1\,600 + 800 + 400 = 800 + 1\,200 = 2\,000$ €.

$C(41) = 0{,}5 \times 1\,681 + 820 + 400 = 840{,}5 + 1\,220 = 2\,060{,}5$ €.

Coût réel : $2\,060{,}5 - 2\,000 = 60{,}5$ €, très proche des 60 € annoncés par la dérivée ✔.

À retenir : le nombre dérivé donne une très bonne approximation du coût de l'unité suivante — c'est pour cela que les ingénieurs et les gestionnaires l'utilisent tel quel.

Réponse. $C'(q) = q + 20 \cdot C'(40) = 60$ € (coût marginal) · coût réel de la 41e pièce : 60,50 €.

Rappel de cours. Le coût marginal en q est $C'(q)$: le coût approché de l'unité supplémentaire.

Erreur fréquente. Confondre coût marginal $C'(40) = 60$ € et coût moyen $\frac{C(40)}{40} = 50$ € : deux indicateurs différents, deux décisions différentes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Équation de la tangente

Il faut deux ingrédients : $f(3)$ et $f'(3)$.

$f(3) = 9 - 12 + 7 = 4$, donc le point de tangence est $(3\,;4)$.

$f'(x) = 2x - 4$, donc $f'(3) = 6 - 4 = 2$.

Formule de la tangente au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici : $y = 2(x - 3) + 4 = 2x - 6 + 4$, soit $y = 2x - 2$.

Vérification pour $A(5\,;8)$: $2 \times 5 - 2 = 8$ ✔. Le point A est bien sur la tangente.

Attention, A n'est pas pour autant sur la COURBE : $f(5) = 25 - 20 + 7 = 12 \neq 8$. Tangente et courbe ne se touchent qu'au point de tangence.

Réponse. T:$y = 2x - 2$ · $A(5\,;8)$ appartient bien à T (mais pas à la courbe).

Rappel de cours. $y = f'(a)(x - a) + f(a)$: la pente vient de la dérivée, le point vient de la fonction.

Erreur fréquente. Écrire $y = f'(a)x + f(a)$ en oubliant le $(x - a)$: on obtiendrait $y = 2x + 4$, une droite parallèle à la vraie tangente mais décalée.

Correction de l'exercice 7 – Variations d'un polynôme de degré 2

$f'(x) = -4x + 12$.

f' est une fonction affine décroissante (coefficient $-4 < 0$). Elle s'annule quand $-4x + 12 = 0$, soit $x = 3$.

Donc $f'(x) > 0$ pour $x < 3$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 3$.

Le signe de la dérivée donne les variations : f est CROISSANTE sur $]-\infty\,;3]$ puis DÉCROISSANTE sur $[3\,;+\infty[$.

$f(3) = -18 + 36 - 10 = 8$.

f admet donc un MAXIMUM égal à 8, atteint en $x = 3$.

Contrôle par la forme canonique : $f(x) = -2(x - 3)^2 + 8$, qui donne bien le sommet $(3\,;8)$ ✔. La dérivation retrouve ici ce que la forme canonique donnait directement — elle sera indispensable dès le degré 3.

Réponse. $f'(x) = -4x + 12$ · croissante jusqu'à 3, décroissante ensuite · maximum $f(3) = 8$.

Rappel de cours. $f' > 0 \Rightarrow f$ croissante · $f' < 0 \Rightarrow f$ décroissante · f' change de signe $\Rightarrow$ extremum.

Erreur fréquente. Conclure que f est décroissante parce que f' est décroissante. C'est le SIGNE de f', pas son sens de variation, qui détermine les variations de f.

Correction de l'exercice 8 – Variations d'un polynôme de degré 3

$g'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Vérification de la forme factorisée : $3(x - 1)(x - 3) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3x^2 - 12x + 9$ ✔.

La dérivée s'annule en $x = 1$ et $x = 3$. Son coefficient dominant est $3 > 0$: elle est POSITIVE à l'extérieur de $[1\,;3]$ et NÉGATIVE entre 1 et 3.

Donc g est croissante sur $]-\infty\,;1]$, décroissante sur $[1\,;3]$, puis croissante sur $[3\,;+\infty[$.

Valeurs aux extremums : $g(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$ et $g(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$.

g admet donc un MAXIMUM LOCAL de 5 en $x = 1$ et un MINIMUM LOCAL de 1 en $x = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pourquoi « local » ? Parce que g reprend sa croissance après 3 et dépasse 5 : par exemple $g(5) = 125 - 150 + 45 + 1 = 21$. Le maximum de 5 n'est donc pas un maximum global.

Réponse. $g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ · croissante, décroissante, croissante · maximum local $g(1) = 5$, minimum local $g(3) = 1$.

Rappel de cours. Une dérivée de degré 2 avec deux racines donne le schéma classique du degré 3 : croissante / décroissante / croissante (ou l'inverse si $a < 0$).

Erreur fréquente. Annoncer un maximum GLOBAL en $x = 1$. Un polynôme de degré 3 de coefficient dominant positif tend vers $+\infty$: il n'a pas de maximum global.

Correction de l'exercice 9 – Tangentes horizontales

Une tangente est horizontale là où le nombre dérivé est NUL : on résout $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$.

On factorise par 6 : $f'(x) = 6(x^2 - 3x + 2)$.

On factorise la parenthèse en complétant le carré :
$x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

C'est une différence de carrés : $\left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = (x-2)(x-1)$.

Donc $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$, nulle en $x = 1$ et $x = 2$.

$f(1) = 2 - 9 + 12 - 4 = 1$ et $f(2) = 16 - 36 + 24 - 4 = 0$.

Les points à tangente horizontale sont $(1\,;1)$ et $(2\,;0)$. Ils correspondent respectivement à un maximum local et à un minimum local, puisque f' change de signe en chacun.

Réponse. Tangentes horizontales en $x = 1$ et $x = 2$, aux points $(1\,;1)$ et $(2\,;0)$.

Rappel de cours. Tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(x) = 0$. On résout donc l'équation $f'(x) = 0$, pas $f(x) = 0$.

Erreur fréquente. Résoudre $f(x) = 0$ au lieu de $f'(x) = 0$: on trouverait où la courbe coupe l'axe, pas où elle est plate.

Correction de l'exercice 10 – Approximation affine

$f(2) = 8$ et $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(2) = 12$.

Tangente : $y = 12(x-2) + 8 = 12x - 24 + 8$, soit $y = 12x - 16$.

Près de $x = 2$, la courbe et sa tangente sont presque confondues : on peut donc remplacer $f(x)$ par $12x - 16$.

Estimation : $f(2{,}02) \approx 12 \times 2{,}02 - 16 = 24{,}24 - 16 = 8{,}24$.

Valeur exacte : 8,242 408. L'écart est de 0,0024, soit une erreur relative d'environ 0,03%.

C'est le principe de l'APPROXIMATION AFFINE, omniprésent en physique : on remplace localement une loi compliquée par une droite. Plus l'écart à 2 est petit, meilleure est l'approximation.

Réponse. Tangente $y = 12x - 16$ · estimation $f(2{,}02) \approx 8{,}24$ · valeur exacte 8,2424, erreur de 0,03%.

Rappel de cours. Pour x proche de a : $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$. La tangente est la meilleure droite d'approximation locale.

Erreur fréquente. Utiliser cette approximation loin du point : en $x = 4$, la tangente donne 32 alors que $f(4) = 64$. L'approximation n'est LOCALE.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Volume maximal d’une boîte

Après découpe et pliage, la base est un carré de côté $24 - 2x$ (on retire x de chaque côté), et la hauteur vaut x.

Volume : $V(x) = x(24 - 2x)^2$. Il faut $x > 0$ et $24 - 2x > 0$, donc le domaine est $]0\,;12[$.

Pour dériver, on développe : $(24 - 2x)^2 = 576 - 96x + 4x^2$, donc $V(x) = 576x - 96x^2 + 4x^3$.

$V'(x) = 576 - 192x + 12x^2$.

Vérifions la forme proposée :
$(24 - 2x)(24 - 6x) = 576 - 144x - 48x + 12x^2 = 576 - 192x + 12x^2$ ✔.

Racines de V' : $24 - 2x = 0$ donne $x = 12$ (exclu du domaine) ; $24 - 6x = 0$ donne $x = 4$.

Signe sur $]0\,;12[$: le facteur $(24 - 2x)$ y est toujours positif ; le facteur $(24 - 6x)$ est positif pour $x < 4$, négatif pour $x > 4$.

Donc V croît sur $]0\,;4]$ puis décroît sur $[4\,;12[$: le volume est MAXIMAL pour $x = 4$ cm.

$V(4) = 4 \times (24 - 8)^2 = 4 \times 16^2 = 4 \times 256 = 1\,024$ cm³.

Contrôle avec deux valeurs voisines : $V(3) = 3 \times 18^2 = 972$ cm³ et $V(5) = 5 \times 14^2 = 980$ cm³, tous deux inférieurs à 1 024 ✔.

Réponse. $V(x) = x(24 - 2x)^2$ sur $]0\,;12[$ · $V'(x) = (24 - 2x)(24 - 6x)$ · volume maximal 1 024 cm³ pour $x = 4$ cm (boîte $16 \times 16 \times 4$).

Rappel de cours. Optimiser : exprimer la grandeur, DÉRIVER, chercher les racines de la dérivée, étudier son signe, conclure.

Erreur fréquente. Retenir $x = 12$ comme solution : c’est une racine de la dérivée, mais elle sort du domaine (la base serait de côté nul, le volume nul).

Correction de l’exercice 12 – Production la plus rentable

On divise chaque terme par q : $C_m(q) = \dfrac{0{,}1q^3}{q} - \dfrac{6q^2}{q} + \dfrac{150q}{q} = 0{,}1q^2 - 6q + 150$.

C’est maintenant un polynôme, qu’on peut dériver avec les formules du programme :
$C_m'(q) = 0{,}2q - 6$.

$C_m'(q) = 0$ donne $0{,}2q = 6$, soit $q = 30$.

Signe : C_m' est affine croissante, négative avant 30, positive après. Donc C_m décroît puis croît : $q = 30$ est un MINIMUM.

$C_m(30) = 0{,}1 \times 900 - 180 + 150 = 90 - 30 = 60$ € par pièce.

Coût marginal : $C'(q) = 0{,}3q^2 - 12q + 150$, donc
$C'(30) = 0{,}3 \times 900 - 360 + 150 = 270 - 210 = 60$ €.

Les deux valent 60 € ! Ce n’est pas un hasard : le coût moyen est minimal EXACTEMENT là où il croise le coût marginal. Tant que produire une pièce de plus coûte moins que la moyenne actuelle, la moyenne baisse ; dès que cela coûte plus, elle remonte.

Vérification du raisonnement : $C_m(25) = 62{,}5$ € et $C_m(35) = 62{,}5$ €, tous deux supérieurs à 60 € ✔.

Réponse. $C_m(q) = 0{,}1q^2 - 6q + 150$ · coût moyen minimal pour $q = 30$ pièces · $C_m(30) = C'(30) = 60$ € par pièce.

Rappel de cours. Un quotient $C(q)\,/\,q$ se simplifie TERME À TERME avant dérivation : pas besoin de la formule du quotient, hors programme ici.

Erreur fréquente. Dériver $C(q)\,/\,q$ comme un quotient. Inutile et risqué : on développe

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d'abord, on obtient un polynôme, on dérive.

Correction de l'exercice 13 – Vitesse et accélération d'un chariot

$v(t) = d'(t) = -0{,}3t^2 + 3t + 2$ (en m/s).

La vitesse est un polynôme de degré 2 de coefficient dominant $-0{,}3 < 0$: elle admet un maximum. On dérive : $v'(t) = -0{,}6t + 3$.

$v'(t) = 0$ donne $t = \dfrac{3}{0{,}6} = 5$ s.

v' est positive avant 5, négative après : la vitesse croît jusqu'à $t = 5$ s puis décroît.

$v(5) = -0{,}3 \times 25 + 15 + 2 = -7{,}5 + 17 = 9{,}5$ m/s : c'est la vitesse maximale.

Le chariot recule si sa vitesse devient négative.
$v(10) = -0{,}3 \times 100 + 30 + 2 = -30 + 32 = 2$ m/s.

La vitesse vaut 9,5 m/s en $t = 5$ et 2 m/s en $t = 10$, et v est décroissante sur $[5\,;10]$ sans s'annuler (puisque $v(10) = 2 > 0$).

Donc $v(t) > 0$ sur tout $[0\,;10]$: le chariot ralentit à la fin, mais il ne recule JAMAIS sur cette durée.

Remarque : $v'(t)$ est l'accélération. Elle est positive avant 5 s (le chariot accélère) et négative après (il freine) — la décélération vaut $v'(10) = -3$ m/s².

Réponse. $v(t) = -0{,}3t^2 + 3t + 2$ · vitesse maximale 9,5 m/s à $t = 5$ s · la vitesse reste positive ($v(10) = 2$ m/s) : pas de recul.

Rappel de cours. Position $\overset{\text{dérivée}}{\longrightarrow}$ vitesse $\overset{\text{dérivée}}{\longrightarrow}$ accélération. Le signe de la vitesse dit le SENS du mouvement.

Erreur fréquente. Confondre « la vitesse décroît » et « le chariot recule ». Une vitesse décroissante mais positive, c'est un ralentissement, pas une marche arrière.

Correction de l'exercice 14 – Étude complète d'un polynôme de degré 3

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$.

Factorisation par complétion du carré : $x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4$.

Différence de carrés : $(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = (x-3)(x+1)$. Donc $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$.

Signe de f' : positive à l'extérieur de $[-1\,;3]$, négative entre -1 et 3 (coefficient dominant $3 > 0$).

Variations sur $[-3\,;6]$: f croît sur $[-3\,;-1]$, décroît sur $[-1\,;3]$, puis croît sur $[3\,;6]$.

Valeurs remarquables : $f(-3) = -27 - 27 + 27 + 5 = -22$; $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$; $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$; $f(6) = 216 - 108 - 54 + 5 = 59$.

Sur l'intervalle fermé, les extremums GLOBAUX se cherchent parmi les extremums locaux ET les bornes.

Candidats au maximum : $f(-1) = 10$ et $f(6) = 59$ ⇒ maximum 59 en $x = 6$.

Candidats au minimum : $f(-3) = -22$ et $f(3) = -22$ ⇒ minimum -22, atteint DEUX fois, en $x = -3$ et en $x = 3$.

Réponse. $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$ · croissante, décroissante, croissante · maximum $f(6) = 59$, minimum -22 atteint en -3 et en 3.

Rappel de cours. Sur un intervalle FERMÉ, ne jamais oublier les bornes : un extremum global peut y être atteint sans que f' s'y annule.

Erreur fréquente. Annoncer « maximum 10 en $x = -1$ » : c'est un maximum LOCAL. La

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

borne $x = 6$ donne bien mieux.

Correction de l'exercice 15 – Lire les variations sur la courbe de la dérivée

Lecture du graphique : la courbe de f' est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0\,;4[$, coupe l'axe en $x = 4$, puis est en dessous sur $]4\,;7]$.

Donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;4[$, $f'(4) = 0$, et $f'(x) < 0$ sur $]4\,;7]$.

Le signe de f' donne les variations de f : f est CROISSANTE sur $[0\,;4]$ puis DÉCROISSANTE sur $[4\,;7]$.

f admet donc un MAXIMUM en $x = 4$.

La tangente à la courbe de f est horizontale là où f' s'annule, c'est-à-dire au point d'abscisse 4.

Piège de lecture à éviter : sur $[0\,;2]$, la courbe de f' DESCEND, mais elle reste positive. Donc f continue de croître — simplement de moins en moins vite.

Réponse. $f' > 0$ sur $[0\,;4[$ et $f' < 0$ sur $]4\,;7]$ · f croissante puis décroissante · tangente horizontale en $x = 4$, où f atteint son maximum.

Rappel de cours. Sur la courbe de f', on ne lit QUE des signes et des zéros. C'est le signe de f' qui donne les variations de f.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : puissance transmise maximale

$P'(i) = 24 - 4i$.

$P'(i) = 0$ donne $i = 6$ A. P' est positive avant 6, négative après : la puissance croît puis décroît, donc $i = 6$ A est un MAXIMUM.

$P(6) = 24 \times 6 - 2 \times 36 = 144 - 72 = 72$ W.

La puissance utile maximale est de 72 W, pour une intensité de 6 A.

Condition $P(i) > 64$: $24i - 2i^2 > 64$, soit $-2i^2 + 24i - 64 > 0$.

On divise par -2 en inversant l'inégalité : $i^2 - 12i + 32 < 0$.

Factorisation : $i^2 - 12i + 32 = (i-6)^2 - 36 + 32 = (i-6)^2 - 4 = (i-8)(i-4)$.

Ce produit est négatif entre ses racines : la condition est vérifiée pour $4 < i < 8$.

Contrôle : $P(4) = 96 - 32 = 64$ ✔ (égalité) et $P(5) = 120 - 50 = 70 > 64$ ✔.

Interprétation physique : à $i = 6$ A, la tension aux bornes du circuit vaut $24 - 2 \times 6 = 12$ V, soit la moitié de la force électromotrice. On retrouve le résultat classique du transfert maximal de puissance : la puissance utile est maximale quand la résistance de charge égale la résistance interne.

Réponse. $P'(i) = 24 - 4i$ · maximum 72 W pour $i = 6$ A · $P(i) > 64$ W pour $4 < i < 8$ A.

Rappel de cours. Le maximum d'une grandeur se cherche par $P'(i) = 0$, puis se CONFIRME par le signe de P' de part et d'autre.

Erreur fréquente. Croire que la puissance utile croît indéfiniment avec l'intensité : le terme $-2i^2$ (pertes internes) finit par l'emporter. À $i = 12$ A, $P = 0$: tout est dissipé dans le générateur.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : tangente passant par un point donné

$f(a) = a^2$ et $f'(x) = 2x$ donc $f'(a) = 2a$.

Tangente au point d'abscisse a : $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - 2a^2 + a^2$, soit $y = 2ax - a^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Cette tangente passe par $A(0\,;-4)$ si les coordonnées de A vérifient son équation : $-4 = 2a \times 0 - a^2$.

Donc $-4 = -a^2$, soit $a^2 = 4$ et $a = 2$ ou $a = -2$.

Il y a DEUX tangentes solutions, aux points d'abscisses 2 et -2.

Pour $a = 2$: $y = 4x - 4$. Pour $a = -2$: $y = -4x - 4$.

Contrôle : les deux droites passent bien par $(0\,;-4)$ ✔ et touchent la parabole respectivement en $(2\,;4)$ et $(-2\,;4)$.

Remarque : le point A est SOUS la parabole, à l'extérieur ; c'est ce qui permet deux tangentes. Un point situé à l'intérieur de la parabole n'en admettrait aucune.

Réponse. Tangente en a : $y = 2ax - a^2$ · elle passe par A pour $a = 2$ et $a = -2$ · tangentes $y = 4x - 4$ et $y = -4x - 4$.

Rappel de cours. « Tangente passant par un point » ≠ « tangente EN un point ». On paramètre par l'abscisse a du point de tangence, puis on écrit que le point donné vérifie l'équation.

Erreur fréquente. Écrire la tangente « au point A » : A n'est pas sur la courbe ($f(0) = 0 \neq -4$). C'est le point de tangence, inconnu, qu'il faut chercher.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : profil d'une came

$h'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3)$.

Factorisation : $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1 = (x-3)(x-1)$.

Donc $h'(x) = -3(x-1)(x-3)$.

Signe : le coefficient global est $-3 < 0$, donc h' est NÉGATIVE à l'extérieur de $[1\,;3]$ et POSITIVE entre 1 et 3.

Variations : h décroît sur $[0\,;1]$, croît sur $[1\,;3]$, puis décroît sur $[3\,;4]$.

Valeurs : $h(0) = 8$ mm ; $h(1) = -1 + 6 - 9 + 8 = 4$ mm ; $h(3) = -27 + 54 - 27 + 8 = 8$ mm ; $h(4) = -64 + 96 - 36 + 8 = 4$ mm.

Candidats au maximum : $h(0) = 8$ et $h(3) = 8$ ⇒ hauteur maximale 8 mm, atteinte en $x = 0$ et $x = 3$.

Candidats au minimum : $h(1) = 4$ et $h(4) = 4$ ⇒ hauteur minimale 4 mm, atteinte en $x = 1$ et $x = 4$.

Amplitude du mouvement : $8 - 4 = 4$ mm. C'est la course du galet suiveur.

Contrôle de cohérence : le profil part de 8 mm, descend à 4 mm, remonte à 8 mm, redescend à 4 mm — une came à deux temps, cohérente avec les variations trouvées ✔.

Réponse. $h'(x) = -3(x-1)(x-3)$ · décroît, croît, décroît · hauteur maximale 8 mm (en 0 et 3), minimale 4 mm (en 1 et 4) · amplitude 4 mm.

Rappel de cours. Le coefficient -3 devant la factorisation inverse le schéma de signes habituel : dérivée NÉGATIVE à l'extérieur des racines.

Erreur fréquente. Factoriser $-3x^2 + 12x - 9$ en $-3(x^2 + 4x + 3)$: en factorisant par -3, tous les signes intérieurs changent, d'où $x^2 - 4x + 3$.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : bénéfice avec un coût cubique

Recette : $R(q) = 40q$.

Bénéfice : $B(q) = 40q - (0{,}1q^3 - 3q^2 + 40q + 100) = 40q - 0{,}1q^3 + 3q^2 - 40q - 100$.

Les termes en $40q$ se compensent : $B(q) = -0{,}1q^3 + 3q^2 - 100$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$B'(q) = -0{,}3q^2 + 6q = -0{,}3q(q - 20)$.

Racines : $q = 0$ et $q = 20$. Sur $]0\,;30]$, le facteur $-0{,}3q$ est négatif, donc le signe de B' est l'OPPOSÉ de celui de $(q - 20)$.

Ainsi $B'(q) > 0$ pour $0 < q < 20$ et $B'(q) < 0$ pour $q > 20$: le bénéfice est maximal en $q = 20$ cartes.

$B(20) = -0{,}1 \times 8\,000 + 3 \times 400 - 100 = -800 + 1\,200 - 100 = 300$ €.

Coût marginal : $C'(q) = 0{,}3q^2 - 6q + 40$, donc
$C'(20) = 0{,}3 \times 400 - 120 + 40 = 120 - 80 = 40$ €.

On retrouve exactement le prix de vente, 40 € ✔.

Explication : le bénéfice est maximal quand $B'(q) = 0$, c'est-à-dire quand $R'(q) = C'(q)$. Or $R'(q) = 40$ est le prix de vente. Tant que la carte suivante coûte MOINS que 40 €, il faut produire ; dès qu'elle coûte PLUS, il faut s'arrêter. C'est la règle « recette marginale = coût marginal », valable pour toute production.

Contrôle : $B(19) = -685{,}9 + 1\,083 - 100 = 297{,}1$ € et
$B(21) = -926{,}1 + 1\,323 - 100 = 296{,}9$ €, tous deux inférieurs à 300 € ✔.

Réponse. $B(q) = -0{,}1q^3 + 3q^2 - 100$ · bénéfice maximal 300 € pour 20 cartes par jour · $C'(20) = 40$ € = prix de vente.

Rappel de cours. Optimum de production : $B'(q) = 0 \Leftrightarrow R'(q) = C'(q)$, soit recette marginale = coût marginal.

Erreur fréquente. Oublier la parenthèse en soustrayant $C(q)$: le +100 de charges fixes doit devenir −100 dans le bénéfice, sinon l'atelier gagnerait de l'argent en ne produisant rien.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : section maximale d'une gouttière

La bande fait 30 cm de large. On en prélève x pour chaque bord relevé, donc le fond mesure $30 - 2x$ cm.

La section est un rectangle de hauteur x et de largeur $30 - 2x$:
$A(x) = x(30 - 2x) = 30x - 2x^2$.

Domaine : il faut $x > 0$ et $30 - 2x > 0$, donc $0 < x < 15$.

$A'(x) = 30 - 4x$.

$A'(x) = 0$ donne $x = \dfrac{30}{4} = 7{,}5$ cm. La dérivée est positive avant, négative après : c'est un MAXIMUM.

$A(7{,}5) = 7{,}5 \times (30 - 15) = 7{,}5 \times 15 = 112{,}5$ cm².

Dimensions optimales : un fond de 15 cm et des bords de 7,5 cm — la hauteur vaut exactement la MOITIÉ de la largeur du fond.

Contrôle avec deux valeurs voisines : $A(7) = 7 \times 16 = 112$ cm² et $A(8) = 8 \times 14 = 112$ cm², tous deux inférieurs à 112,5 ✔.

Remarque : ce rapport « hauteur = moitié du fond » est général pour ce type de pliage, quelle que soit la largeur de la bande. Avec une bande de 40 cm, l'optimum serait $x = 10$ cm pour un fond de 20 cm.

Réponse. $A(x) = 30x - 2x^2$ sur $]0\,;15[$ · $A'(x) = 30 - 4x$, maximum en $x = 7{,}5$ cm · section maximale 112,5 cm² (fond 15 cm, bords 7,5 cm).

Rappel de cours. Optimiser une section : exprimer l'aire, dériver, annuler la dérivée, vérifier le signe, puis contrôler que la solution est dans le domaine.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Écrire le fond $30 - x$ en oubliant qu'il y a DEUX bords relevés : l'optimum tomberait à $x = 15$ cm, une gouttière de largeur nulle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).