Dérivation — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Dériver, c'est mesurer une variation INSTANTANÉE : la vitesse d'un mobile à un instant précis, le coût du prochain article produit, la pente d'un profil à un point donné. Le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de la tangente au point d'abscisse a — et le signe de la fonction dérivée donne les variations, donc les maximums et les minimums. C'est l'outil d'optimisation le plus employé en STI2D : volume maximal d'un emballage, puissance maximale transmise, production la plus rentable. Ces 20 exercices corrigés vont du calcul de dérivée à l'étude complète d'un polynôme de degré 3, en passant par l'équation de la tangente et les problèmes type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/derivation

Exercice 1 – Du taux de variation au nombre dérivé

Un mobile parcourt $d(t) = t^2$ mètres en t secondes. On s'intéresse à sa vitesse autour de $t = 3$ s.

1. Calcule la vitesse moyenne entre 3 s et 5 s, puis entre 3 s et 3,1 s.

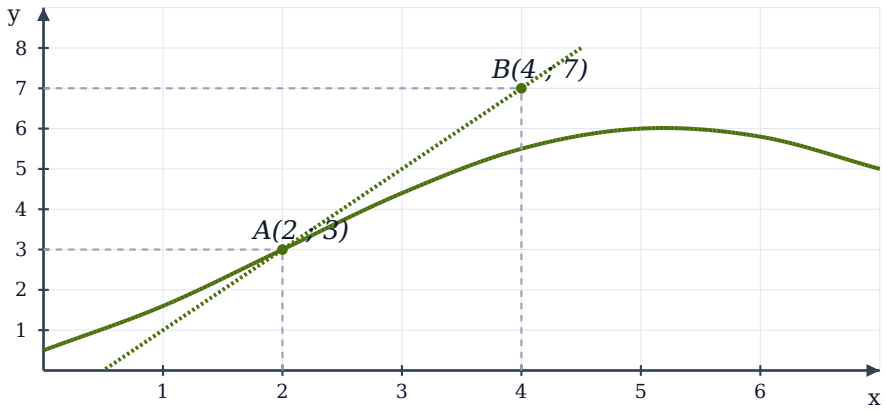
2. Que semblent devenir ces vitesses moyennes quand l'intervalle se resserre ?

Exercice 2 – Lire un nombre dérivé sur un graphique

La courbe représente une fonction f. La tangente au point $A(2\,;3)$ passe aussi par le point $B(4\,;7)$.

1. Détermine $f(2)$ et $f'(2)$.

2. La tangente au point d'abscisse 5 est horizontale. Que vaut $f'(5)$?



Exercice 3 – Les dérivées à connaître

On considère les fonctions $f(x) = 7$, $g(x) = 5x - 3$, $h(x) = x^2$ et $k(x) = x^3$.

1. Donne la fonction dérivée de chacune d'elles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Dériver un polynôme

Dérive les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 5 \qquad g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4 \qquad h(x) = -x^3 + 12x$$

1. Donne $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

Exercice 5 – Calculer et interpréter un nombre dérivé

Le coût de production, en euros, de q pièces est $C(q) = 0{,}5q^2 + 20q + 400$, pour $0 \leq q \leq 100$.

1. Calcule $C'(q)$.

2. Calcule $C'(40)$ et interprète le résultat.

3. Compare avec le coût réel de la 41^{e} pièce.

Exercice 6 – Équation de la tangente

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 7$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Détermine l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 3.

2. Vérifie que le point $A(5\,;8)$ appartient à T.

Exercice 7 – Variations d'un polynôme de degré 2

Soit $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $f'(x)$ et étudie son signe.

2. Dresse le tableau de variations de f.

3. Donne l'extremum de f.

Exercice 8 – Variations d'un polynôme de degré 3

Soit $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $g'(x)$ et vérifie que $g'(x) = 3(x-1)(x-3)$.

2. Dresse le tableau de variations de g.

Exercice 9 – Tangentes horizontales

Soit $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Détermine les abscisses des points où la tangente à la courbe de f est horizontale.

2. Donne les coordonnées de ces points.

Exercice 10 – Approximation affine

Soit $f(x) = x^3$. On veut estimer $f(2{,}02)$ sans calculatrice.

1. Donne l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

2. Utilise-la pour estimer $f(2{,}02)$.

3. Compare avec la valeur exacte $2{,}02^3 = 8{,}242\,408$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Volume maximal d'une boîte

Dans une plaque carrée de 24 cm de côté, on découpe quatre carrés identiques de côté x aux quatre coins, puis on replie les bords pour former une boîte sans couvercle.

1. Justifie que le volume, en cm³, est $V(x) = x(24 - 2x)^2$ et précise le domaine de x.

2. Montre que $V'(x) = (24 - 2x)(24 - 6x)$.

3. Détermine la découpe qui maximise le volume et ce volume maximal.

Exercice 12 – Production la plus rentable

Un atelier produit q pièces par jour ($0 < q \leq 60$). Le coût total, en euros, est $C(q) = 0{,}1q^3 - 6q^2 + 150q$.

1. Exprime le coût moyen $C_m(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ sous forme polynomiale.

2. Détermine la production qui minimise le coût moyen.

3. Calcule ce coût moyen minimal et compare-le au coût marginal en ce point.

Exercice 13 – Vitesse et accélération d'un chariot

Un chariot automatisé se déplace selon $d(t) = -0{,}1t^3 + 1{,}5t^2 + 2t$, où d est la distance en mètres et t le temps en secondes, pour $0 \leq t \leq 10$.

1. Exprime la vitesse $v(t) = d'(t)$.

2. Détermine l'instant où la vitesse est maximale et cette vitesse.

3. Le chariot recule-t-il avant $t = 10$ s ?

Exercice 14 – Étude complète d'un polynôme de degré 3

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur l'intervalle $[-3\,;6]$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise-la.

2. Dresse le tableau de variations de f sur $[-3\,;6]$.

3. Donne le maximum et le minimum de f sur cet intervalle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

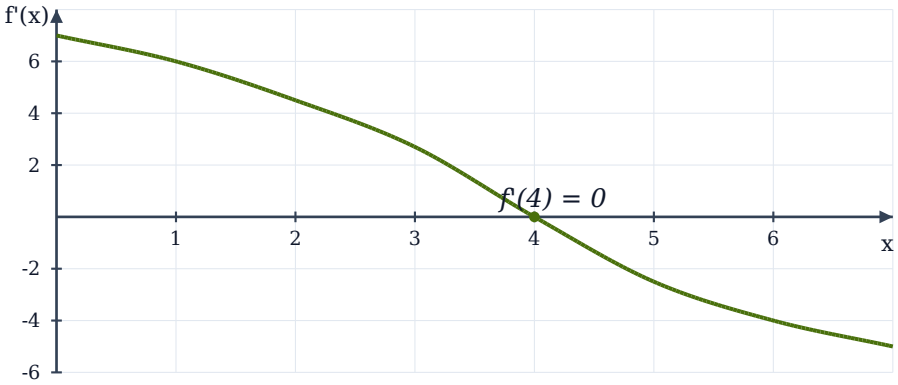
Exercice 15 – Lire les variations sur la courbe de la dérivée

La courbe représentée est celle de la fonction DÉRIVÉE f' d'une fonction f définie sur $[0\,;7]$.

1. Donne le signe de f' sur $[0\,;7]$.

2. En déduire le tableau de variations de f.

3. En quel point la courbe de f admet-elle une tangente horizontale ?



Exercice 16 – Type bac : puissance transmise maximale

Un générateur de force électromotrice 24 V et de résistance interne 2 Ω alimente un circuit. La puissance utile transmise, en watts, s'écrit $P(i) = 24i - 2i^2$, où i est l'intensité en ampères, avec $0 \le i \le 12$.

1. Calcule $P'(i)$.

2. Détermine l'intensité qui maximise la puissance utile, et cette puissance.

3. Pour quelles intensités la puissance utile dépasse-t-elle 64 W ?

Exercice 17 – Type bac : tangente passant par un point donné

Soit $f(x) = x^2$ et $A(0\,;-4)$ un point du plan.

1. Écris l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a, en fonction de a.

2. Détermine les valeurs de a pour lesquelles cette tangente passe par A.

3. Donne les équations des tangentes obtenues.

Exercice 18 – Type bac : profil d'une came

Le profil d'une came est décrit, pour $0 \le x \le 4$, par $h(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$, où h est la hauteur en millimètres.

1. Calcule $h'(x)$ et factorise-la.

2. Dresse le tableau de variations de h sur $[0\,;4]$.

3. Détermine la hauteur maximale et la hauteur minimale du profil, puis l'amplitude du mouvement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Type bac : bénéfice avec un coût cubique

Un atelier fabrique q cartes par jour ($0 \leq q \leq 30$). Le coût total, en euros, est $C(q) = 0{,}1q^3 - 3q^2 + 40q + 100$, et chaque carte est vendue 40 €.

1. Exprime le bénéfice $B(q)$.

2. Détermine la production qui maximise le bénéfice et le bénéfice correspondant.

3. Vérifie qu'en ce point le coût marginal est égal au prix de vente, et explique pourquoi.

Exercice 20 – Type bac : section maximale d'une gouttière

On fabrique une gouttière en pliant à angle droit les deux bords d'une bande de tôle de 30 cm de largeur. On note x la hauteur des bords relevés, en centimètres.

1. Exprime la largeur du fond puis l'aire $A(x)$ de la section, et donne le domaine de x.

2. Calcule $A'(x)$ et détermine la hauteur qui rend la section maximale.

3. Donne cette aire maximale et les dimensions correspondantes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).