Dérivées et approximation affine — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Ce chapitre ajoute au calcul de dérivées tout ce que la physique réclame : dériver un PRODUIT (une puissance $p = u\,i$), un QUOTIENT (une grandeur en $1/x$), un COSINUS ou un SINUS (un signal alternatif) et une fonction composée $f(ax+b)$ (un signal de pulsation ω). Il installe aussi une idée essentielle en mesure : l'APPROXIMATION AFFINE, $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$, qui permet d'estimer l'effet d'une petite variation — l'erreur commise sur une puissance quand la tension varie de 1%, par exemple. La notation $\frac{dy}{dx}$, omniprésente en physique, prend ici son sens. Ces 20 exercices corrigés vont du calcul de dérivée au problème type bac sur un signal ou un mouvement de piston. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/derivees-approximation-affine

Exercice 1 – La notation dy/dx

La charge d'un condensateur, en millicoulombs, vaut $q(u) = 4{,}7u$ où u est la tension en volts.

1. Calcule $\frac{dq}{du}$ et donne son unité.

2. De combien varie la charge quand la tension passe de 10 V à 10,5 V ?

Exercice 2 – Dérivée d'un produit

Dérive les fonctions $f(x) = (2x+1)(x^2-3)$ et $g(x) = x\cos x$.

1. Donne $f'(x)$ et $g'(x)$.

Exercice 3 – Dérivée d'un quotient

Dérive $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ sur $]2\,;+\infty[$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Donne $f'(x)$ et $g'(x)$.

Exercice 4 – Dérivées de cosinus et sinus

On considère $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = 3\sin x - 2\cos x$.

1. Donne les dérivées de ces trois fonctions.

2. Calcule $h'(0)$ et $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Dérivée de f(ax + b)

Dérive $f(x) = \cos(3x)$, $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ et $h(x) = (5x - 1)^2$.

1. Donne $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

Exercice 6 – Produit avec une fonction trigonométrique

Dérive $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$ et $g(x) = 2x\cos(3x)$.

1. Donne $f'(x)$ et $g'(x)$.

Exercice 7 – Quotient et variations

Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise-la.

2. Dresse le tableau de variations de f.

Exercice 8 – Approximation affine

La puissance dissipée par une résistance de 50 Ω vaut $P(u) = \dfrac{u^2}{50}$ watts, où u est la tension en volts.

1. Calcule $P(20)$ et $P'(20)$.

2. Estime, par approximation affine, la variation de puissance quand la tension passe de 20 V à 20,4 V.

3. Compare à la variation exacte.

Exercice 9 – Dériver un signal sinusoïdal

Une tension vaut $u(t) = 12\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ volts, t en secondes.

1. Calcule $u'(t)$.

2. Calcule $u'(0)$.

3. Quelle est la valeur maximale de $|u'(t)|$?

Exercice 10 – Tangente à la courbe d'un quotient

Soit $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$, définie sur $]-3\,;+\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$.

2. Détermine l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

Exercice 11 – Propagation d'une incertitude

La résistance équivalente de deux résistors en parallèle, l'un fixe de 100 Ω et l'autre réglable de valeur x, vaut $R(x) = \dfrac{100x}{100+x}$ ohms.

1. Calcule $R(200)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Calcule $R'(200)$.

3. Le réglage de x est connu à $\pm 5\ \Omega$ près. Estime l'incertitude sur R.

Exercice 12 – Vitesse et accélération d'un mouvement sinusoïdal

Un point mobile a pour position $x(t) = 0{,}05\cos(20t)$ mètres, t en secondes.

1. Calcule la vitesse $v(t) = x'(t)$.

2. Calcule l'accélération $a(t) = v'(t)$.

3. Donne les valeurs maximales de $|v|$ et de $|a|$.

4. Vérifie que $a(t) = -400\,x(t)$.

Exercice 13 – Puissance instantanée et produit

Dans un dipôle, $u(t) = 10\cos(5t)$ volts et $i(t) = 2\sin(5t)$ ampères. La puissance instantanée est $p(t) = u(t)\,i(t)$.

1. Exprime $p(t)$.

2. Calcule $p'(t)$ à l'aide de la formule du produit.

3. Détermine les instants où la puissance est extrémale sur $\left[0\,;\frac{\pi}{5}\right]$.

Exercice 14 – Variation relative

L'énergie stockée dans un condensateur de capacité $C = 2\times10^{-4}$ F vaut $E(u) = \frac{1}{2}Cu^2$ joules.

1. Calcule $E(60)$.

2. Calcule $E'(u)$, puis $E'(60)$.

3. La tension augmente de 1% (de 60 V à 60,6 V). De quel pourcentage l'énergie augmente-t-elle ?

Exercice 15 – Puissance maximale transmise

Un générateur de force électromotrice 12 V et de résistance interne 6 Ω alimente une charge de résistance R. La puissance transmise à la charge vaut $p(R) = \dfrac{144R}{(R+6)^2}$ watts, pour $R > 0$.

1. Calcule $p(3)$ et $p(12)$.

2. Montre que $p'(R) = \dfrac{144(6-R)}{(R+6)^3}$.

3. Détermine la résistance qui maximise la puissance transmise et cette puissance.

Exercice 16 – Type bac : étude complète d'un signal

Un signal est modélisé par $s(t) = 4\sin\left(10t - \frac{\pi}{3}\right)$ volts, t en secondes.

1. Donne l'amplitude, la pulsation et la période.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Calcule $s'(t)$ puis $s'(0)$.

3. Détermine les instants de $\left[0\,;\frac{\pi}{5}\right]$ où le signal est extrémal.

4. Calcule la valeur maximale de $|s'|$ et dis où elle est atteinte.

Exercice 17 – Type bac : minimiser un coût moyen

Le coût total de production de q pièces (en centaines) est $C(q) = q^2 + 4q + 36$ milliers d'euros, pour $q > 0$. Le coût moyen par centaine de pièces est $C_m(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

1. Exprime $C_m(q)$.

2. Calcule $C_m'(q)$ avec la formule du quotient.

3. Détermine la production qui minimise le coût moyen, et ce coût.

4. Vérifie qu'en ce point $C_m(q) = C'(q)$.

Exercice 18 – Type bac : linéariser un capteur

Un capteur de distance délivre une tension $u(d) = \dfrac{24}{d+2}$ volts, où d est la distance en mètres ($d > 0$).

1. Calcule $u(4)$ et $u'(4)$.

2. Donne l'équation de la tangente en $d = 4$, et l'approximation affine de u autour de 4 m.

3. Estime $u(4{,}2)$ par cette approximation, puis compare à la valeur exacte.

4. Le capteur est-il plus sensible à 1 m ou à 4 m ?

Exercice 19 – Type bac : composée, tangente et variations

Soit $f(x) = (2x-1)^2 - 4x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $f'(x)$ en utilisant la règle de $f(ax+b)$.

2. Dresse le tableau de variations de f.

3. Détermine l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

4. Vérifie le résultat en développant f avant de dériver.

Exercice 20 – Type bac : mouvement d'un piston

Le déplacement d'un piston est modélisé par $x(t) = 0{,}08\cos(60\pi t)$ mètres, t en secondes (moteur à 1 800 tours/min).

1. Vérifie que la fréquence du mouvement correspond bien à 1 800 tours par minute.

2. Calcule la vitesse $v(t)$ et sa valeur maximale.

3. Calcule l'accélération $a(t)$ et sa valeur maximale.

4. À quel instant de la première période la vitesse est-elle maximale en valeur absolue ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – La notation dy/dx

La notation $\frac{dq}{du}$ désigne la dérivée de q par rapport à u : c'est une autre écriture de $q'(u)$.

Ici q est une fonction affine de coefficient 4,7, donc $\frac{dq}{du} = 4{,}7$.

Unité : des millicoulombs par volt (mC/V), c'est-à-dire la capacité du condensateur.

Variation de tension : $\Delta u = 10{,}5 - 10 = 0{,}5$ V.

Variation de charge : $\Delta q = \frac{dq}{du} \times \Delta u = 4{,}7 \times 0{,}5 = 2{,}35$ mC.

Contrôle direct : $q(10{,}5) - q(10) = 49{,}35 - 47 = 2{,}35$ mC ✔ Pour une fonction affine, l'approximation est même EXACTE.

À retenir : $\frac{dq}{du}$ se lit comme un « taux de variation par unité » — c'est un rapport de variations, avec une unité qui combine les deux grandeurs.

Réponse. $\frac{dq}{du} = 4{,}7$ mC/V · $\Delta q = 2{,}35$ mC.

Rappel de cours. $\frac{dy}{dx}$ est la dérivée de y par rapport à x : sa valeur indique de combien varie y pour UNE unité de x.

Erreur fréquente. Lire $\frac{dq}{du}$ comme une fraction à simplifier. C'est une notation globale, désignant une dérivée.

Correction de l'exercice 2 – Dérivée d'un produit

Formule du produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

Pour f : $u = 2x + 1$ donc $u' = 2$; $v = x^2 - 3$ donc $v' = 2x$.

$f'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x$.

En réduisant : $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$.

Contrôle par développement préalable : $f(x) = 2x^3 - 6x + x^2 - 3$, dont la dérivée est $6x^2 + 2x - 6$ ✔.

Pour g : $u = x$ donc $u' = 1$; $v = \cos x$ donc $v' = -\sin x$.

$g'(x) = 1 \times \cos x + x \times (-\sin x) = \cos x - x \sin x$.

Réponse. $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$ · $g'(x) = \cos x - x \sin x$.

Rappel de cours. $(uv)' = u'v + uv'$: deux termes, jamais $u'v'$.

Erreur fréquente. Écrire $(uv)' = u'v'$: pour f, on obtiendrait $2 \times 2x = 4x$, ce qui est faux (la dérivée est de degré 2).

Correction de l'exercice 3 – Dérivée d'un quotient

Formule du quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Pour f : $u = 3x + 1$ donc $u' = 3$; $v = x - 2$ donc $v' = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$f'(x) = \dfrac{3(x-2) - (3x+1)\times 1}{(x-2)^2} = \dfrac{3x - 6 - 3x - 1}{(x-2)^2}$.

$f'(x) = \dfrac{-7}{(x-2)^2}$.

Remarque : f' est toujours NÉGATIVE (un carré au dénominateur), donc f est décroissante sur tout son domaine.

Pour g : $u = 1$ donc $u' = 0$; $v = x$ donc $v' = 1$.

$g'(x) = \dfrac{0 \times x - 1 \times 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$.

C'est la dérivée de référence de la fonction inverse, à connaître directement.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-2)^2} \cdot g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Rappel de cours. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$: attention à l'ORDRE (c'est $u'v$ moins uv') et au carré au dénominateur.

Erreur fréquente. Inverser le numérateur en $uv' - u'v$: tous les signes de la dérivée changent, et donc les variations annoncées.

Correction de l'exercice 4 – Dérivées de cosinus et sinus

Dérivées de référence : $(\cos x)' = -\sin x$ et $(\sin x)' = \cos x$.

Donc $f'(x) = -\sin x$ et $g'(x) = \cos x$.

Pour h, on dérive terme à terme : $h'(x) = 3\cos x - 2 \times (-\sin x) = 3\cos x + 2\sin x$.

$h'(0) = 3\cos 0 + 2\sin 0 = 3 \times 1 + 0 = 3$.

$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \times 0 + 2 \times 1 = 2$.

Astuce de mémorisation : en dérivant, cos « descend » vers $-\sin$, et sin « monte » vers cos. Le signe moins n'apparaît que pour le cosinus.

Réponse. $f'(x) = -\sin x \cdot g'(x) = \cos x \cdot h'(x) = 3\cos x + 2\sin x$, avec $h'(0) = 3$ et $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Rappel de cours. $(\cos x)' = -\sin x \cdot (\sin x)' = \cos x$. Le signe moins est du côté du cosinus.

Erreur fréquente. Oublier le double changement de signe dans $-2\cos x$: sa dérivée est $+2\sin x$, pas $-2\sin x$.

Correction de l'exercice 5 – Dérivée de f(ax + b)

Règle : si $F(x) = f(ax + b)$, alors $F'(x) = a \times f'(ax + b)$. On multiplie par le coefficient de x.

$f(x) = \cos(3x)$: la dérivée du cosinus est $-\sin$, et $a = 3$, donc $f'(x) = -3\sin(3x)$.

$g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$: la dérivée du sinus est cos, et $a = 2$, donc $g'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

$h(x) = (5x - 1)^2$: ici $f(X) = X^2$ donc $f'(X) = 2X$, et $a = 5$. Donc $h'(x) = 5 \times 2(5x - 1) = 10(5x - 1)$.

Contrôle de h par développement : $h(x) = 25x^2 - 10x + 1$, dont la dérivée est $50x - 10 = 10(5x - 1)$ ✔.

Le facteur a est la partie la plus oubliée de cette règle — et c'est celle qui compte le plus en physique, où a est la pulsation ω.

Réponse. $f'(x) = -3\sin(3x) \cdot g'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot h'(x) = 10(5x - 1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. $(f(ax+b))' = a\,f'(ax+b)$: on n'oublie jamais le facteur a.

Erreur fréquente. Écrire $(\cos 3x)' = -\sin(3x)$ sans le 3 : la dérivée serait trois fois trop petite.

Correction de l'exercice 6 – Produit avec une fonction trigonométrique

Pour f, formule du produit avec $u = x^2+1$ ($u' = 2x$) et $v = \sin x$ ($v' = \cos x$).

$f'(x) = 2x\sin x + (x^2+1)\cos x$.

Pour g, on combine produit ET composition : $u = 2x$ donc $u' = 2$; $v = \cos(3x)$ donc $v' = -3\sin(3x)$.

$g'(x) = 2\cos(3x) + 2x \times (-3\sin(3x))$.

$g'(x) = 2\cos(3x) - 6x\sin(3x)$.

Contrôle en $x = 0$: $g'(0) = 2\cos 0 - 0 = 2$. Or près de 0, $g(x) = 2x\cos(3x) \approx 2x$ (car $\cos(3x) \approx 1$), de pente 2 ✔.

Réponse. $f'(x) = 2x\sin x + (x^2+1)\cos x \cdot g'(x) = 2\cos(3x) - 6x\sin(3x)$.

Rappel de cours. Quand un facteur est lui-même composé, on applique la règle $f(ax+b)$ À L'INTÉRIEUR de la formule du produit.

Erreur fréquente. Dériver $\cos(3x)$ en $-\sin(3x)$ dans la formule du produit : il manque le facteur 3, et le terme devient $-2x\sin(3x)$ au lieu de $-6x\sin(3x)$.

Correction de l'exercice 7 – Quotient et variations

$u = x^2$ donc $u' = 2x$; $v = x+1$ donc $v' = 1$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}.$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

Sur $]-1\,;+\infty[$, le dénominateur $(x+1)^2$ est strictement positif : le signe de f' est celui de $x(x+2)$.

Or sur cet intervalle, $x+2 > 1 > 0$. Donc le signe de f' est celui de x.

Conclusion : f est DÉCROISSANTE sur $]-1\,;0]$ et CROISSANTE sur $[0\,;+\infty[$.

Minimum en $x = 0$: $f(0) = \frac{0}{1} = 0$.

Contrôle : $f(-0{,}5) = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5$ et $f(1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$, tous deux supérieurs à 0 ✔.

Réponse. $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ · f décroît sur $]-1\,;0]$ puis croît sur $[0\,;+\infty[$, minimum $f(0) = 0$.

Rappel de cours. Le dénominateur d'une dérivée de quotient est un CARRÉ, donc positif : seul le numérateur porte le signe.

Erreur fréquente. Étudier le signe du dénominateur : inutile (il est positif), mais oublier d'exclure la valeur interdite $x = -1$ serait une vraie faute.

Correction de l'exercice 8 – Approximation affine

$P(20) = \frac{400}{50} = 8$ W.

$P'(u) = \frac{2u}{50} = \frac{u}{25}$, donc $P'(20) = \frac{20}{25} = 0{,}8$ W/V.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Approximation affine : $\Delta P \approx P'(20) \times \Delta u$, avec $\Delta u = 0{,}4$ V.

$\Delta P \approx 0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32$ W.

Variation exacte : $P(20{,}4) = \dfrac{20{,}4^2}{50} = \dfrac{416{,}16}{50} = 8{,}323\,2$ W, donc $\Delta P = 0{,}323\,2$ W.

L'approximation donne 0,32 W contre 0,3232 W en réalité : une erreur de 0,0032 W, soit 1% de la variation.

L'approximation affine est donc excellente pour une petite variation. Elle se dégraderait pour un grand Δu : de 20 V à 30 V, elle prévoirait +8 W alors que la variation réelle est de 10 W.

Réponse. $P(20) = 8$ W et $P'(20) = 0{,}8$ W/V · $\Delta P \approx 0{,}32$ W · variation exacte 0,3232 W (écart de 1%).

Rappel de cours. $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$ pour Δx PETIT : c'est la tangente qui remplace la courbe.

Erreur fréquente. Utiliser cette approximation pour une grande variation : l'erreur croît avec le carré de Δx.

Correction de l'exercice 9 – Dériver un signal sinusoïdal

On applique la règle $(\cos(at+b))' = -a\sin(at+b)$, avec $a = 100\pi$.

$u'(t) = 12 \times (-100\pi \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})) = -1\,200\pi \sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

$u'(0) = -1\,200\pi \sin\dfrac{\pi}{6} = -1\,200\pi \times 0{,}5 = -600\pi \approx -1\,885$ V/s.

Le signe négatif indique que la tension DÉCROÎT à l'instant initial.

Valeur maximale de $|u'|$: le sinus varie entre -1 et 1, donc $|u'(t)| \leq 1\,200\pi \approx 3\,770$ V/s.

Cette valeur maximale est atteinte lorsque $|\sin(\ldots)| = 1$, c'est-à-dire quand la tension elle-même est NULLE — la sinusoïde est la plus « raide » en traversant zéro.

Ordre de grandeur à retenir : dériver un signal multiplie son amplitude par ω. À 50 Hz, $\omega \approx 314$, d'où des variations de plusieurs milliers de volts par seconde pour une tension de 12 V seulement.

Réponse. $u'(t) = -1\,200\pi \sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ · $u'(0) = -600\pi \approx -1\,885$ V/s · $|u'|$ maximal $= 1\,200\pi \approx 3\,770$ V/s.

Rappel de cours. Dériver $A\cos(\omega t + \varphi)$ donne $-A\omega\sin(\omega t + \varphi)$: l'amplitude est multipliée par ω.

Erreur fréquente. Oublier le facteur $\omega = 100\pi$: on annoncerait -6 V/s au lieu de $-1\,885$ V/s, soit 300 fois trop peu.

Correction de l'exercice 10 – Tangente à la courbe d'un quotient

$u = 2x$ donc $u' = 2$; $v = x + 3$ donc $v' = 1$.

$f'(x) = \dfrac{2(x+3) - 2x \times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{2x + 6 - 2x}{(x+3)^2} = \dfrac{6}{(x+3)^2}$.

f' est toujours positive : la fonction est croissante sur tout son domaine.

Point de tangence : $f(1) = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$.

Pente : $f'(1) = \dfrac{6}{16} = 0{,}375$.

Tangente : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 0{,}375(x-1) + 0{,}5 = 0{,}375x - 0{,}375 + 0{,}5$.

Donc T : $y = 0{,}375x + 0{,}125$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : en $x = 1$, la tangente donne $0{,}375 + 0{,}125 = 0{,}5 = f(1)$ ✔.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$ · tangente en $x = 1$: $y = 0{,}375x + 0{,}125$.

Rappel de cours. Tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. La dérivée d'un quotient donne la pente, comme pour n'importe quelle fonction.

Erreur fréquente. Simplifier $\frac{2x}{x+3}$ en $\frac{2}{3}$: on ne simplifie pas une somme au dénominateur, et la dérivée serait nulle.

Correction de l'exercice 11 – Propagation d'une incertitude

$R(200) = \dfrac{100 \times 200}{300} = \dfrac{20\,000}{300} \approx 66{,}67\ \Omega$.

Pour dériver, $u = 100x$ donc $u' = 100$; $v = 100 + x$ donc $v' = 1$.

$$R'(x) = \frac{100(100+x) - 100x}{(100+x)^2} = \frac{10\,000 + 100x - 100x}{(100+x)^2} = \frac{10\,000}{(100+x)^2}.$$

$$R'(200) = \frac{10\,000}{300^2} = \frac{10\,000}{90\,000} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111.$$

Approximation affine : $\Delta R \approx R'(200) \times \Delta x = 0{,}111 \times 5 \approx 0{,}56\ \Omega$.

Donc $R = 66{,}67 \pm 0{,}56\ \Omega$, soit une incertitude relative de $\dfrac{0{,}56}{66{,}67} \approx 0{,}84\%$.

Contrôle exact : $R(205) = \dfrac{20\,500}{305} \approx 67{,}21$ et $R(195) = \dfrac{19\,500}{295} \approx 66{,}10$. L'écart réel est d'environ 0,55 de chaque côté ✔.

Observation intéressante : une incertitude de 2,5% sur x (5 sur 200) ne produit que 0,84% d'incertitude sur R. Le montage en parallèle ATTÉNUE l'effet du réglage — c'est la petitesse de R' qui le dit.

Réponse. $R(200) \approx 66{,}67\ \Omega$ · $R'(200) = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$ · incertitude $\Delta R \approx 0{,}56\ \Omega$, soit 0,84%.

Rappel de cours. L'approximation affine sert à PROPAGER une incertitude : $\Delta y \approx |f'(x)|\,\Delta x$.

Erreur fréquente. Transférer directement le pourcentage : 2,5% d'incertitude sur x ne donne pas 2,5% sur R. C'est la dérivée qui fait le lien.

Correction de l'exercice 12 – Vitesse et accélération d'un mouvement sinusoïdal

$v(t) = x'(t) = 0{,}05 \times (-20\sin(20t)) = -1\sin(20t) = -\sin(20t)$ m/s.

$a(t) = v'(t) = -(20\cos(20t)) = -20\cos(20t)$ m/s².

Vitesse maximale : $|v(t)| \leq 1$ m/s, atteinte quand $|\sin(20t)| = 1$, c'est-à-dire au passage par la position $x = 0$.

Accélération maximale : $|a(t)| \leq 20$ m/s², atteinte quand $|\cos(20t)| = 1$, c'est-à-dire aux positions extrêmes $x = \pm 0{,}05$ m.

Vérification de la relation : $-400\,x(t) = -400 \times 0{,}05\cos(20t) = -20\cos(20t) = a(t)$ ✔.

Cette relation $a = -\omega^2 x$ (avec $\omega = 20$, donc $\omega^2 = 400$) caractérise l'oscillateur harmonique : l'accélération est proportionnelle à la position et de signe opposé — c'est-à-dire toujours dirigée vers le centre.

Cohérence physique : vitesse maximale au centre, accélération maximale aux extrémités. C'est exactement ce que l'on observe sur un ressort ou un pendule de faible amplitude.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $v(t) = -\sin(20t)$ m/s · $a(t) = -20\cos(20t)$ m/s² · $|v|_{\max} = 1$ m/s et $|a|_{\max} = 20$ m/s² · $a(t) = -400\,x(t)$ ✔.

Rappel de cours. Position → vitesse → accélération : chaque dérivation multiplie l'amplitude par ω et déphase de $\frac{\pi}{2}$.

Erreur fréquente. Oublier le facteur ω à chaque dérivation : on annoncerait $|v|_{\max} = 0{,}05$ m/s au lieu de 1 m/s.

Correction de l'exercice 13 – Puissance instantanée et produit

$p(t) = 10\cos(5t) \times 2\sin(5t) = 20\cos(5t)\sin(5t)$ watts.

Dérivation par la formule du produit, avec $u = 20\cos(5t)$ (donc $u' = -100\sin(5t)$) et $v = \sin(5t)$ (donc $v' = 5\cos(5t)$).

$p'(t) = -100\sin(5t) \times \sin(5t) + 20\cos(5t) \times 5\cos(5t)$.

$p'(t) = -100\sin^2(5t) + 100\cos^2(5t) = 100(\cos^2(5t) - \sin^2(5t))$.

Les extremums vérifient $p'(t) = 0$, soit $\cos^2(5t) = \sin^2(5t)$, c'est-à-dire $|\cos(5t)| = |\sin(5t)|$.

Cela se produit lorsque $5t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{5}\right]$, l'argument $5t$ varie de 0 à π : les solutions sont $5t = \frac{\pi}{4}$ et $5t = \frac{3\pi}{4}$, donc $t = \frac{\pi}{20}$ et $t = \frac{3\pi}{20}$.

Valeurs : $p\left(\frac{\pi}{20}\right) = 20\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$ W (maximum).

$p\left(\frac{3\pi}{20}\right) = 20\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4} = 20 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -10$ W (minimum).

Lecture physique : la puissance oscille entre +10 W et −10 W. Une puissance négative signifie que le dipôle RESTITUE de l'énergie au circuit — comportement typique d'un composant purement réactif (bobine ou condensateur), pour lequel tension et courant sont en quadrature comme ici.

Réponse. $p(t) = 20\cos(5t)\sin(5t)$ · $p'(t) = 100(\cos^2(5t) - \sin^2(5t))$ · extremums en $t = \frac{\pi}{20}$ (+10 W) et $t = \frac{3\pi}{20}$ (−10 W).

Rappel de cours. $p = ui$ se dérive par la formule du produit : $p' = u'i + ui'$. C'est la version « physique » de cette formule.

Erreur fréquente. Dériver $\cos(5t)$ en $-\sin(5t)$ sans le facteur 5 : le résultat serait cinq fois trop petit.

Correction de l'exercice 14 – Variation relative

$E(60) = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-4} \times 3\,600 = 10^{-4} \times 3\,600 = 0{,}36$ J.

$E'(u) = \frac{1}{2}C \times 2u = Cu = 2 \times 10^{-4}u$.

$E'(60) = 2 \times 10^{-4} \times 60 = 0{,}012$ J/V.

Variation de tension : $\Delta u = 0{,}6$ V, donc $\Delta E \approx 0{,}012 \times 0{,}6 = 0{,}007\,2$ J.

Variation relative de l'énergie : $\frac{\Delta E}{E} = \frac{0{,}007\,2}{0{,}36} = 0{,}02$, soit 2%.

Une hausse de 1% de la tension entraîne donc une hausse d'environ 2% de l'énergie : le facteur 2 vient de l'exposant de u^2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle exact : $E(60{,}6) = 10^{-4} \times 60{,}6^2 = 10^{-4} \times 3\,672{,}36 = 0{,}367\,236$ J, soit une hausse de $0{,}007\,236$ J, c'est-à-dire 2,01% ✔.

Règle générale utile en physique : pour $y = kx^n$, une variation relative de p% sur x entraîne environ $n \times p$% sur y.

Réponse. $E(60) = 0{,}36$ J · $E'(60) = 0{,}012$ J/V · l'énergie augmente d'environ 2% (le double de la variation de tension).

Rappel de cours. Pour $y = kx^n$: $\dfrac{\Delta y}{y} \approx n\,\dfrac{\Delta x}{x}$. L'exposant amplifie la variation relative.

Erreur fréquente. Croire qu'une hausse de 1% de u donne 1% d'énergie en plus : le carré double l'effet.

Correction de l'exercice 15 – Puissance maximale transmise

$p(3) = \dfrac{144 \times 3}{81} = \dfrac{432}{81} \approx 5{,}33$ W.

$p(12) = \dfrac{144 \times 12}{324} = \dfrac{1\,728}{324} \approx 5{,}33$ W — la même valeur, ce qui suggère un maximum entre les deux.

Dérivation par la formule du quotient, avec $u = 144R$ (donc $u' = 144$) et $v = (R+6)^2$.

Pour v', on utilise la règle de $f(ax+b)$: $v' = 2(R+6)$.

$$p'(R) = \frac{144(R+6)^2 - 144R \times 2(R+6)}{(R+6)^4}.$$

On factorise le numérateur par $144(R+6)$: $144(R+6)[(R+6) - 2R] = 144(R+6)(6-R)$.

$p'(R) = \dfrac{144(R+6)(6-R)}{(R+6)^4} = \dfrac{144(6-R)}{(R+6)^3}$ ✔ après simplification par $(R+6)$.

Signe : sur $R > 0$, le dénominateur est positif, donc le signe de p' est celui de $(6-R)$.

p' est positive pour $R < 6$ et négative pour $R > 6$: la puissance est MAXIMALE pour $R = 6\ \Omega$.

$p(6) = \dfrac{144 \times 6}{144} = 6$ W.

Conclusion : la puissance transmise est maximale (6 W) lorsque la charge est ÉGALE à la résistance interne du générateur. C'est le théorème d'adaptation d'impédance, utilisé en électronique de puissance et en radiofréquence.

Contrôle : $p(3) = p(12) \approx 5{,}33 < 6$ ✔, et ces deux valeurs encadrent bien l'optimum.

Réponse. $p(3) = p(12) \approx 5{,}33$ W · $p'(R) = \dfrac{144(6-R)}{(R+6)^3}$ · maximum 6 W pour $R = 6\ \Omega$ (adaptation d'impédance).

Rappel de cours. Une dérivée de quotient se SIMPLIFIE presque toujours : on factorise le numérateur avant d'étudier son signe.

Erreur fréquente. Développer $(R+6)^2$ et $(R+6)^4$ sans factoriser : le calcul devient inextricable alors que la factorisation donne le signe en une ligne.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : étude complète d'un signal

Amplitude 4 V, pulsation $\omega = 10$ rad/s, période $T = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5} \approx 0{,}628$ s.

$s'(t) = 4 \times 10 \cos\left(10t - \dfrac{\pi}{3}\right) = 40 \cos\left(10t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ V/s.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$s'(0) = 40\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 40 \times \frac{1}{2} = 20$ V/s : le signal est croissant à l'instant initial.

Extremums de s : ils vérifient $s'(t) = 0$, donc $\cos\left(10t - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, soit $10t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$10t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, donc $t = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{10}$.

Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{5}\right]$, c'est-à-dire $[0\,;0{,}628]$: $k = 0$ donne $t = \frac{\pi}{12} \approx 0{,}262$ s, et $k = 1$ donne $t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{10} = \frac{11\pi}{60} \approx 0{,}576$ s.

Nature : en $t \approx 0{,}262$, $s = 4\sin\frac{\pi}{2} = 4$ V (maximum) ; en $t \approx 0{,}576$, $s = 4\sin\frac{3\pi}{2} = -4$ V (minimum).

Maximum de $|s'|$: le cosinus étant borné par 1, $|s'(t)| \leq 40$ V/s.

Cette valeur est atteinte lorsque $\left|\cos\left(10t - \frac{\pi}{3}\right)\right| = 1$, c'est-à-dire quand le SINUS est nul, donc quand $s(t) = 0$.

Conclusion cohérente : le signal varie le plus vite en traversant zéro, et pas du tout à ses extrémums (où sa tangente est horizontale) ✔.

Réponse. $A = 4$ V, $\omega = 10$ rad/s, $T = \frac{\pi}{5} \approx 0{,}63$ s · $s'(t) = 40\cos\left(10t - \frac{\pi}{3}\right)$ et $s'(0) = 20$ V/s · extremums en $t = \frac{\pi}{12}$ (+4 V) et $t = \frac{11\pi}{60}$ (−4 V) · $|s'|_{\max} = 40$ V/s, aux passages par zéro.

Rappel de cours. Les extremums du signal sont les zéros de sa dérivée, et réciproquement les extremums de la dérivée sont les zéros du signal.

Erreur fréquente. Résoudre $s(t) = 0$ pour chercher les extremums : c'est $s'(t) = 0$ qu'il faut résoudre.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : minimiser un coût moyen

$C_m(q) = \frac{q^2 + 4q + 36}{q}$. On peut aussi l'écrire $q + 4 + \frac{36}{q}$ en divisant terme à terme.

Dérivation par la formule du quotient, avec $u = q^2 + 4q + 36$ ($u' = 2q + 4$) et $v = q$ ($v' = 1$).

$C_m'(q) = \frac{(2q+4)q - (q^2 + 4q + 36)}{q^2} = \frac{2q^2 + 4q - q^2 - 4q - 36}{q^2}$.

$C_m'(q) = \frac{q^2 - 36}{q^2}$.

Contrôle par l'autre écriture : $\left(q + 4 + \frac{36}{q}\right)' = 1 - \frac{36}{q^2} = \frac{q^2 - 36}{q^2}$ ✔ Les deux méthodes s'accordent.

Signe : le dénominateur est positif, donc le signe est celui de $q^2 - 36 = (q - 6)(q + 6)$. Sur $q > 0$, c'est le signe de $(q - 6)$.

C_m décroît sur $]0\,;6]$ puis croît sur $[6\,;+\infty[$: le minimum est atteint en $q = 6$.

$C_m(6) = 6 + 4 + \frac{36}{6} = 6 + 4 + 6 = 16$ milliers d'euros par centaine de pièces.

Vérification de la dernière question : $C'(q) = 2q + 4$, donc $C'(6) = 16$.

On a bien $C_m(6) = C'(6) = 16$ ✔ Le coût moyen est minimal exactement là où il croise le coût marginal — résultat général en économie de la production.

Interprétation : tant que produire une centaine de plus coûte MOINS que la moyenne actuelle, la moyenne baisse ; dès que cela coûte plus, elle remonte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $C_m(q) = q + 4 + \frac{36}{q}$ · $C_m'(q) = \frac{q^2 - 36}{q^2}$ · minimum en $q = 6$ centaines, $C_m(6) = 16$ k€ · et $C'(6) = 16$ également ✔.

Rappel de cours. Un coût moyen peut se dériver par la formule du quotient OU après division terme à terme : les deux voies doivent donner le même résultat.

Erreur fréquente. Oublier la parenthèse dans $(2q + 4)q - (q^2 + 4q + 36)$: les signes du second terme changent tous, et la dérivée serait fausse.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : linéariser un capteur

$u(4) = \frac{24}{6} = 4$ V.

Dérivée : avec $u = 24$ (constante) et $v = d + 2$, on obtient $u'(d) = \frac{0 \times (d+2) - 24 \times 1}{(d+2)^2} = \frac{-24}{(d+2)^2}$.

$u'(4) = \frac{-24}{36} = -\frac{2}{3} \approx -0{,}667$ V/m. La tension DÉCROÎT avec la distance.

Tangente : $y = -\frac{2}{3}(d - 4) + 4 = -\frac{2}{3}d + \frac{8}{3} + 4 = -\frac{2}{3}d + \frac{20}{3}$.

Approximation affine autour de 4 : $u(d) \approx -\frac{2}{3}d + \frac{20}{3}$, valable pour d proche de 4 m.

Estimation : $u(4{,}2) \approx 4 - \frac{2}{3} \times 0{,}2 = 4 - 0{,}133 = 3{,}867$ V.

Valeur exacte : $u(4{,}2) = \frac{24}{6{,}2} \approx 3{,}871$ V. L'écart est de 0,004 V, soit 0,1% : l'approximation est excellente.

Sensibilité à 1 m : $u'(1) = \frac{-24}{9} \approx -2{,}67$ V/m, soit QUATRE fois plus qu'à 4 m.

Le capteur est donc beaucoup plus sensible à courte distance. C'est le défaut classique de ce type de capteur : sa précision se dégrade quand la distance augmente, la tension variant alors très peu.

Conséquence pratique : pour une mesure à 4 m, une incertitude de 0,05 V sur la lecture correspond à $\frac{0{,}05}{0{,}667} \approx 0{,}075$ m, alors qu'à 1 m elle ne correspondrait qu'à 0,019 m.

Réponse. $u(4) = 4$ V et $u'(4) = -\frac{2}{3}$ V/m · tangente $y = -\frac{2}{3}d + \frac{20}{3}$ · $u(4{,}2) \approx 3{,}867$ V contre 3,871 V exact · le capteur est 4 fois plus sensible à 1 m.

Rappel de cours. « Linéariser » un capteur, c'est remplacer sa caractéristique par sa TANGENTE autour du point de fonctionnement.

Erreur fréquente. Dériver $\frac{24}{d+2}$ en $\frac{24}{1}$ ou en $-\frac{24}{d+2}$: il faut la formule du quotient, et le carré au dénominateur.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : composée, tangente et variations

Le premier terme est de la forme $g(2x - 1)$ avec $g(X) = X^2$, donc sa dérivée est $2 \times 2(2x - 1) = 4(2x - 1)$.

Le second terme, $-4x$, a pour dérivée -4.

$f'(x) = 4(2x - 1) - 4 = 8x - 4 - 4 = 8x - 8$.

$f'(x) = 0$ donne $x = 1$. f' est affine croissante, donc négative avant 1 et positive après.

f est donc DÉCROISSANTE sur $]-\infty\,;1]$ puis CROISSANTE sur $[1\,;+\infty[$.

Minimum : $f(1) = (2 - 1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Tangente en 0 : $f(0) = (-1)^2 - 0 = 1$ et $f'(0) = -8$.

$T : y = -8(x - 0) + 1$, soit $y = -8x + 1$.

Vérification par développement : $f(x) = 4x^2 - 4x + 1 - 4x = 4x^2 - 8x + 1$.

Sa dérivée : $8x - 8$ ✔ identique à celle obtenue par la règle de composition.

Contrôle du minimum sur la forme développée : $4x^2 - 8x + 1 = 4(x - 1)^2 - 3$, qui confirme le sommet $(1\,;-3)$ ✔.

Réponse. $f'(x) = 8x - 8$ · décroissante puis croissante, minimum $f(1) = -3$ · tangente en 0 : $y = -8x + 1$ · résultat confirmé par développement.

Rappel de cours. $((ax + b)^2)' = 2a(ax + b)$: le facteur a sort de la composition.

Erreur fréquente. Dériver $(2x - 1)^2$ en $2(2x - 1)$ sans le facteur 2 : la dérivée serait $4x - 6$, et le minimum se déplacerait.

Correction de l’exercice 20 – Type bac : mouvement d’un piston

Pulsation : $\omega = 60\pi$ rad/s. Fréquence : $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{60\pi}{2\pi} = 30$ Hz.

30 tours par seconde font $30 \times 60 = 1\,800$ tours par minute ✔ La modélisation est cohérente.

Vitesse : $v(t) = x'(t) = 0{,}08 \times (-60\pi \sin(60\pi t)) = -4{,}8\pi \sin(60\pi t)$ m/s.

Valeur maximale : $|v| \leq 4{,}8\pi \approx 15{,}08$ m/s, soit environ 54,3 km/h — pour un déplacement de seulement 8 cm d’amplitude.

Accélération : $a(t) = v'(t) = -4{,}8\pi \times 60\pi \cos(60\pi t) = -288\pi^2 \cos(60\pi t)$ m/s².

Valeur maximale : $|a| \leq 288\pi^2 \approx 2\,842{,}4$ m/s², soit près de 290 fois l’accélération de la pesanteur.

C’est ce chiffre qui impose la robustesse des bielles et des paliers : les forces d’inertie sont considérables à 1 800 tr/min.

Instant de vitesse maximale : il faut $|\sin(60\pi t)| = 1$, donc $60\pi t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, soit $t = \dfrac{1}{120} + \dfrac{k}{60}$.

La période vaut $T = \dfrac{1}{30}$ s. Sur $\left[0\,;\dfrac{1}{30}\right[$, les solutions sont $t = \dfrac{1}{120} \approx 8{,}33$ ms ($k = 0$) et $t = \dfrac{1}{120} + \dfrac{1}{60} = \dfrac{3}{120} = \dfrac{1}{40} = 25$ ms ($k = 1$).

Ces instants correspondent au passage du piston par sa position centrale ($x = 0$), là où la vitesse est maximale — et où l’accélération est nulle ✔ Les deux grandeurs sont en opposition, comme toujours en mouvement sinusoïdal.

Réponse. $f = 30$ Hz $= 1\,800$ tr/min ✔ · $v(t) = -4{,}8\pi \sin(60\pi t)$, $|v|_{\max} \approx 15{,}1$ m/s · $a(t) = -288\pi^2 \cos(60\pi t)$, $|a|_{\max} \approx 2\,842$ m/s² · vitesse maximale à $t = \dfrac{1}{120}$ s et $t = \dfrac{1}{40}$ s.

Rappel de cours. Chaque dérivation multiplie l’amplitude par ω : $x_{\max} = A$, $v_{\max} = A\omega$, $a_{\max} = A\omega^2$.

Erreur fréquente. Négliger ω^2 dans l’accélération : avec $\omega \approx 188{,}5$, le facteur est de 35 530. C’est ce qui explique des accélérations énormes pour de petits déplacements.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).