Dérivées et approximation affine — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Ce chapitre ajoute au calcul de dérivées tout ce que la physique réclame : dériver un PRODUIT (une puissance $p = ui$), un QUOTIENT (une grandeur en $1/x$), un COSINUS ou un SINUS (un signal alternatif) et une fonction composée $f(ax+b)$ (un signal de pulsation ω). Il installe aussi une idée essentielle en mesure : l'APPROXIMATION AFFINE, $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$, qui permet d'estimer l'effet d'une petite variation — l'erreur commise sur une puissance quand la tension varie de 1%, par exemple. La notation $\frac{dy}{dx}$, omniprésente en physique, prend ici son sens. Ces 20 exercices corrigés vont du calcul de dérivée au problème type bac sur un signal ou un mouvement de piston. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/derivees-approximation-affine

Exercice 1 – La notation dy/dx

La charge d'un condensateur, en millicoulombs, vaut $q(u) = 4{,}7u$ où u est la tension en volts.

1. Calcule $\frac{dq}{du}$ et donne son unité.

2. De combien varie la charge quand la tension passe de 10 V à 10,5 V ?

Exercice 2 – Dérivée d'un produit

Dérive les fonctions $f(x) = (2x+1)(x^2-3)$ et $g(x) = x\cos x$.

1. Donne $f'(x)$ et $g'(x)$.

Exercice 3 – Dérivée d'un quotient

Dérive $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ sur $]2\,;+\infty[$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Donne $f'(x)$ et $g'(x)$.

Exercice 4 – Dérivées de cosinus et sinus

On considère $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = 3\sin x - 2\cos x$.

1. Donne les dérivées de ces trois fonctions.

2. Calcule $h'(0)$ et $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Dérivée de f(ax + b)

Dérive $f(x) = \cos(3x)$, $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ et $h(x) = (5x - 1)^2$.

1. Donne $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

Exercice 6 – Produit avec une fonction trigonométrique

Dérive $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$ et $g(x) = 2x\cos(3x)$.

1. Donne $f'(x)$ et $g'(x)$.

Exercice 7 – Quotient et variations

Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise-la.

2. Dresse le tableau de variations de f.

Exercice 8 – Approximation affine

La puissance dissipée par une résistance de 50 Ω vaut $P(u) = \dfrac{u^2}{50}$ watts, où u est la tension en volts.

1. Calcule $P(20)$ et $P'(20)$.

2. Estime, par approximation affine, la variation de puissance quand la tension passe de 20 V à 20,4 V.

3. Compare à la variation exacte.

Exercice 9 – Dériver un signal sinusoïdal

Une tension vaut $u(t) = 12\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ volts, t en secondes.

1. Calcule $u'(t)$.

2. Calcule $u'(0)$.

3. Quelle est la valeur maximale de $|u'(t)|$?

Exercice 10 – Tangente à la courbe d'un quotient

Soit $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$, définie sur $]-3\,;+\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$.

2. Détermine l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.

Exercice 11 – Propagation d'une incertitude

La résistance équivalente de deux résistors en parallèle, l'un fixe de 100 Ω et l'autre réglable de valeur x, vaut $R(x) = \dfrac{100x}{100+x}$ ohms.

1. Calcule $R(200)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Calcule $R'(200)$.

3. Le réglage de x est connu à $\pm 5\ \Omega$ près. Estime l'incertitude sur R.

Exercice 12 – Vitesse et accélération d'un mouvement sinusoïdal

Un point mobile a pour position $x(t) = 0{,}05\cos(20t)$ mètres, t en secondes.

1. Calcule la vitesse $v(t) = x'(t)$.

2. Calcule l'accélération $a(t) = v'(t)$.

3. Donne les valeurs maximales de $|v|$ et de $|a|$.

4. Vérifie que $a(t) = -400\,x(t)$.

Exercice 13 – Puissance instantanée et produit

Dans un dipôle, $u(t) = 10\cos(5t)$ volts et $i(t) = 2\sin(5t)$ ampères. La puissance instantanée est $p(t) = u(t)\,i(t)$.

1. Exprime $p(t)$.

2. Calcule $p'(t)$ à l'aide de la formule du produit.

3. Détermine les instants où la puissance est extrémale sur $\left[0\,;\frac{\pi}{5}\right]$.

Exercice 14 – Variation relative

L'énergie stockée dans un condensateur de capacité $C = 2\times10^{-4}$ F vaut $E(u) = \frac{1}{2}Cu^2$ joules.

1. Calcule $E(60)$.

2. Calcule $E'(u)$, puis $E'(60)$.

3. La tension augmente de 1% (de 60 V à 60,6 V). De quel pourcentage l'énergie augmente-t-elle ?

Exercice 15 – Puissance maximale transmise

Un générateur de force électromotrice 12 V et de résistance interne 6 Ω alimente une charge de résistance R. La puissance transmise à la charge vaut $p(R) = \dfrac{144R}{(R+6)^2}$ watts, pour $R > 0$.

1. Calcule $p(3)$ et $p(12)$.

2. Montre que $p'(R) = \dfrac{144(6-R)}{(R+6)^3}$.

3. Détermine la résistance qui maximise la puissance transmise et cette puissance.

Exercice 16 – Type bac : étude complète d'un signal

Un signal est modélisé par $s(t) = 4\sin\left(10t - \frac{\pi}{3}\right)$ volts, t en secondes.

1. Donne l'amplitude, la pulsation et la période.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Calcule $s'(t)$ puis $s'(0)$.

3. Détermine les instants de $\left[0\,;\frac{\pi}{5}\right]$ où le signal est extrémal.

4. Calcule la valeur maximale de $|s'|$ et dis où elle est atteinte.

Exercice 17 – Type bac : minimiser un coût moyen

Le coût total de production de q pièces (en centaines) est $C(q) = q^2 + 4q + 36$ milliers d'euros, pour $q > 0$. Le coût moyen par centaine de pièces est $C_m(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

1. Exprime $C_m(q)$.

2. Calcule $C_m'(q)$ avec la formule du quotient.

3. Détermine la production qui minimise le coût moyen, et ce coût.

4. Vérifie qu'en ce point $C_m(q) = C'(q)$.

Exercice 18 – Type bac : linéariser un capteur

Un capteur de distance délivre une tension $u(d) = \dfrac{24}{d+2}$ volts, où d est la distance en mètres ($d > 0$).

1. Calcule $u(4)$ et $u'(4)$.

2. Donne l'équation de la tangente en $d = 4$, et l'approximation affine de u autour de 4 m.

3. Estime $u(4{,}2)$ par cette approximation, puis compare à la valeur exacte.

4. Le capteur est-il plus sensible à 1 m ou à 4 m ?

Exercice 19 – Type bac : composée, tangente et variations

Soit $f(x) = (2x-1)^2 - 4x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $f'(x)$ en utilisant la règle de $f(ax+b)$.

2. Dresse le tableau de variations de f.

3. Détermine l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

4. Vérifie le résultat en développant f avant de dériver.

Exercice 20 – Type bac : mouvement d'un piston

Le déplacement d'un piston est modélisé par $x(t) = 0{,}08\cos(60\pi t)$ mètres, t en secondes (moteur à 1 800 tours/min).

1. Vérifie que la fréquence du mouvement correspond bien à 1 800 tours par minute.

2. Calcule la vitesse $v(t)$ et sa valeur maximale.

3. Calcule l'accélération $a(t)$ et sa valeur maximale.

4. À quel instant de la première période la vitesse est-elle maximale en valeur absolue ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).