Fonctions et polynômes du second degré — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Un polynôme du second degré, c'est la forme que prend presque toute grandeur qu'on cherche à OPTIMISER : la portée d'un jet, l'aire maximale d'une surface à clôturer, le bénéfice d'un atelier, le rendement d'une installation. Sa courbe est une parabole, et tout l'enjeu du chapitre est de lire dessus trois choses : son sommet (le maximum ou le minimum), ses racines (là où elle coupe l'axe) et son signe. En STI2D, ce travail se fait SANS discriminant : on factorise, ou on part de la forme canonique et on résout $(x-\alpha)^2 = k$. Ces 20 exercices corrigés suivent ce chemin, du calcul d'images au problème d'optimisation type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/fonctions-polynomes-second-degre

Exercice 1 – Images et antécédents

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

1. Calcule $f(0)$, $f(2)$ et $f(-1)$.

2. Vérifie que 1 est un antécédent de -2 par f.

Exercice 2 – Taux de variation moyen

La puissance dissipée par une résistance, en watts, est $P(i) = 5i^2$ où i est l'intensité en ampères.

1. Calcule le taux de variation moyen de P entre $i = 1$ et $i = 3$.

2. Calcule-le entre $i = 3$ et $i = 5$, puis compare.

Exercice 3 – Sommet et sens de variation depuis la forme canonique

Trois fonctions sont données sous forme canonique : $f(x) = (x-3)^2 + 2$, $g(x) = -2(x+1)^2 + 8$ et $h(x) = 4(x-5)^2$.

1. Donne les coordonnées du sommet de chaque parabole.

2. Précise dans chaque cas s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, et sa valeur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

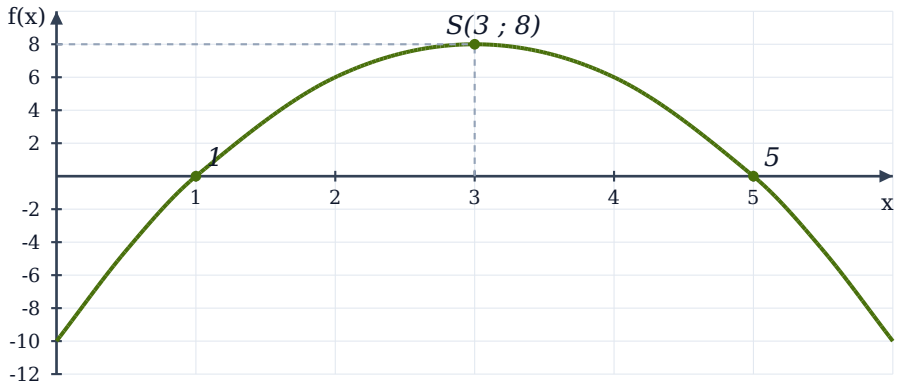
Exercice 4 – Lire une parabole

La courbe représente une fonction polynôme du second degré f sur l'intervalle $[0\,;6]$.

1. Donne les coordonnées du sommet et l'équation de l'axe de symétrie.

2. Lis les racines de f (les valeurs où $f(x) = 0$).

3. Donne le signe de $f(x)$ selon x.



Exercice 5 – Trois écritures d'un même polynôme

On considère $f(x) = 2(x-1)(x-5)$ et $g(x) = 2(x-3)^2 - 8$.

1. Développe et réduis $f(x)$, puis $g(x)$.

2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6 – Racines et signe d'une forme factorisée

Soit $f(x) = -3(x+2)(x-4)$.

1. Détermine les racines de f.

2. Dresse le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Résous l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 7 – Du sommet aux racines par symétrie

Une fonction polynôme du second degré f a pour sommet $S(4\,;-9)$ et admet 1 comme racine.

1. Détermine l'autre racine de f.

2. Sachant que $f(x) = a(x-4)^2 - 9$, détermine a.

3. Donne la forme factorisée de f.

Exercice 8 – Résoudre $(x-\alpha)^2 = k$

On veut résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations $(x-5)^2 = 16$, $2(x+3)^2 = 50$ et $(x-1)^2 = -4$.

1. Résous chacune de ces trois équations.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Factoriser avec une identité remarquable

On considère $A(x) = x^2 - 49$, $B(x) = 4x^2 - 12x$ et $C(x) = x^2 + 10x + 25$.

1. Factorise chacune de ces expressions.

2. Résous $A(x) = 0$, $B(x) = 0$ et $C(x) = 0$.

Exercice 10 – Variations et extremum d'une parabole

Soit $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. On donne sa forme canonique : $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$.

1. Vérifie l'égalité des deux formes.

2. Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Donne l'extremum de f et précise sa nature.

Exercice 11 – Optimiser une aire clôturée

On dispose de 60 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire contre un mur (le mur constitue l'un des grands côtés, il n'est pas grillagé). On note x la largeur de l'enclos, en mètres.

1. Exprime la longueur puis l'aire $A(x)$ de l'enclos en fonction de x.

2. On donne $A(x) = -2(x - 15)^2 + 450$. Vérifie-le.

3. Quelles dimensions donnent l'aire maximale, et quelle est cette aire ?

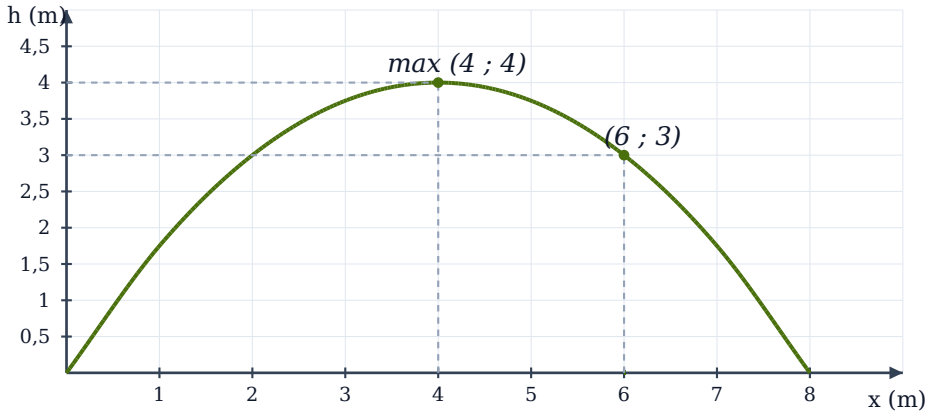
Exercice 12 – Trajectoire d'un jet d'eau

La hauteur d'un jet d'eau, en mètres, est donnée par $h(x) = -0{,}25x^2 + 2x$, où x est la distance horizontale en mètres depuis la buse.

1. Détermine à quelle distance le jet retombe au sol.

2. Calcule la hauteur maximale atteinte et la distance correspondante.

3. Le jet passe-t-il au-dessus d'un obstacle de 3,5 m de haut situé à 6 m de la buse ?



Exercice 13 – Intervalle de bénéfice

Un atelier fabrique q capteurs par jour ($0 \le q \le 60$). Son bénéfice quotidien, en euros, est $B(q) = -q^2 + 50q - 336$.

1. Vérifie que $B(q) = -(q - 8)(q - 42)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Détermine les quantités pour lesquelles l'atelier est bénéficiaire.

3. Détermine la production qui maximise le bénéfice et le bénéfice correspondant.

Exercice 14 – Rendement d'une installation

Le rendement d'un convertisseur, en pourcentage, est modélisé par $r(p) = -0{,}005(p-70)^2 + 92$, où p est la puissance de sortie exprimée en pourcentage de la puissance nominale, avec $20 \leq p \leq 100$.

1. Quel est le rendement maximal et pour quelle puissance ?

2. Calcule le rendement à pleine charge ($p = 100$) et à $p = 20$.

3. Pour quelles puissances le rendement atteint-il au moins 90% ?

Exercice 15 – Intersection de deux courbes

Soient $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = 4x - 5$, définies sur $\mathbb{R}$.

1. Détermine les abscisses des points d'intersection de leurs représentations graphiques.

2. Étudie la position relative des deux courbes.

Exercice 16 – Type bac : bénéfice d'un atelier

Un atelier produit q modules photovoltaïques par jour, $0 \leq q \leq 40$. Le coût total de production, en euros, est $C(q) = q^2 + 10q + 200$, et chaque module est vendu 50 €.

1. Exprime la recette $R(q)$ puis le bénéfice $B(q)$.

2. Mets $B(q)$ sous forme canonique et détermine la production optimale.

3. Détermine, par le calcul, l'intervalle des productions rentables.

Exercice 17 – Type bac : déterminer une parabole à partir d'un graphique

Une pièce en tôle a un bord supérieur parabolique. Dans un repère en centimètres, ce bord passe par les points $(0\,;0)$ et $(12\,;0)$, et son point le plus haut est à 9 cm de hauteur.

1. Détermine l'abscisse du sommet.

2. Détermine l'expression de la fonction f décrivant ce bord, sous forme canonique puis développée.

3. Calcule la hauteur du bord à 3 cm et à 10 cm du bord gauche.

Exercice 18 – Type bac : deux tôles, une même aire

Dans une plaque carrée de côté x cm ($x > 4$), on découpe un carré de côté 4 cm dans un coin. Une seconde pièce est un rectangle de dimensions x cm par 6 cm.

1. Exprime l'aire $A_1(x)$ de la première pièce et $A_2(x)$ de la seconde.

2. Détermine les valeurs de x pour lesquelles les deux pièces ont la même aire.

3. Pour quelles valeurs de x la première pièce est-elle la plus grande ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Type bac : tableau de signes complet

L'écart de réglage d'une machine, en dixièmes de millimètre, est modélisé par $e(t) = 0{,}5t^2 - 4t + 6$, où t est le temps en heures depuis la mise en route, $0 \leq t \leq 10$. Un écart négatif signifie un réglage trop serré, un écart positif un réglage trop lâche.

1. Factorise $e(t)$.

2. Dresse le tableau de signes de $e(t)$ sur $[0\,;10]$.

3. Détermine le moment où le réglage est le plus serré et l'écart correspondant.

Exercice 20 – Type bac : encadrer une cote de fabrication

La résistance mécanique d'une entretoise, en unités arbitraires, dépend de son épaisseur x (en mm) selon $f(x) = -2x^2 + 20x - 32$, pour $0 < x < 10$. Le cahier des charges exige une résistance d'au moins 16.

1. Mets $f(x)$ sous forme canonique et donne la résistance maximale.

2. Détermine l'intervalle des épaisseurs acceptables.

3. Un fournisseur propose des entretoises de 3,5 mm. Conviennent-elles ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Images et antécédents

Calculer une image, c'est remplacer x par la valeur donnée.

$f(0) = 0^2 - 4 \times 0 + 1 = 1$.

$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$.

$f(-1) = (-1)^2 - 4 \times (-1) + 1 = 1 + 4 + 1 = 6$.

Pour l'antécédent, on calcule $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$.

On obtient bien -2 : 1 est donc un antécédent de -2 par f ✔.

Vocabulaire : $f(2) = -3$ se lit « l'image de 2 est -3 », et aussi « 2 est un antécédent de -3 ».

Réponse. $f(0) = 1 \cdot f(2) = -3 \cdot f(-1) = 6 \cdot f(1) = -2$ donc 1 est bien un antécédent de -2.

Rappel de cours. Image : on part de x, on calcule $f(x)$. Antécédent : on part de y, on résout $f(x) = y$.

Erreur fréquente. Calculer $(-1)^2 = -1$. Le carré d'un nombre négatif est POSITIF : $(-1)^2 = 1$. Et $-4 \times (-1) = +4$.

Correction de l'exercice 2 – Taux de variation moyen

Le taux de variation moyen de P entre a et b vaut $\dfrac{P(b) - P(a)}{b - a}$.

$P(1) = 5$ W et $P(3) = 5 \times 9 = 45$ W.

Taux entre 1 et 3 : $\dfrac{45 - 5}{3 - 1} = \dfrac{40}{2} = 20$ W par ampère.

$P(5) = 5 \times 25 = 125$ W, d'où le taux entre 3 et 5 : $\dfrac{125 - 45}{5 - 3} = \dfrac{80}{2} = 40$ W par ampère.

Le taux a DOUBLÉ : la puissance augmente de plus en plus vite quand l'intensité croît. C'est la signature d'une fonction carré, pas d'une fonction affine.

Conséquence pratique : doubler l'intensité ne double pas la puissance dissipée, elle la QUADRUPLE ($P(2i) = 5(2i)^2 = 4 \times 5i^2$). D'où l'échauffement très rapide des conducteurs en surintensité.

Réponse. 20 W/A entre 1 et 3 A · 40 W/A entre 3 et 5 A : le taux double.

Rappel de cours. Taux de variation moyen = $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Constant pour une fonction affine, variable sinon.

Erreur fréquente. Écrire $P(2i) = 2P(i)$: la fonction carré n'est pas affine, les images ne se proportionnalisent pas.

Correction de l'exercice 3 – Sommet et sens de variation depuis la forme canonique

Une forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ se lit directement : le sommet est le point $S(\alpha\,;\beta)$.

$f(x) = (x - 3)^2 + 2$: $\alpha = 3$, $\beta = 2$, sommet $S(3\,;2)$. Comme $a = 1 > 0$, la parabole est « ouverte vers le haut » : $\beta = 2$ est un MINIMUM, atteint en $x = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$g(x) = -2(x+1)^2 + 8$: attention, $(x+1) = (x-(-1))$, donc $\alpha = -1$ et $\beta = 8$, sommet $S(-1\,;8)$. Comme $a = -2 < 0$, c'est un MAXIMUM égal à 8, atteint en $x = -1$.

$h(x) = 4(x-5)^2$ s'écrit $4(x-5)^2 + 0$: sommet $S(5\,;0)$, et $a = 4 > 0$ donc minimum 0 en $x = 5$.

Justification du raisonnement : un carré est toujours ≥ 0. Donc $(x-3)^2 + 2 \geq 2$, avec égalité seulement si $x = 3$ — c'est exactement la définition d'un minimum.

Réponse. f : $S(3\,;2)$, minimum 2 · g : $S(-1\,;8)$, maximum 8 · h : $S(5\,;0)$, minimum 0.

Rappel de cours. $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$: sommet $(\alpha\,;\beta)$ · $a > 0 \Rightarrow$ minimum · $a < 0 \Rightarrow$ maximum.

Erreur fréquente. Lire $\alpha = 1$ dans $(x+1)^2$. Il faut écrire $(x-(-1))^2$: l'abscisse du sommet est l'OPPOSÉ du nombre qui apparaît dans la parenthèse.

Correction de l'exercice 4 – Lire une parabole

Le point le plus haut de la courbe est atteint en $x = 3$, à la hauteur 8 : le sommet est $S(3\,;8)$.

L'axe de symétrie d'une parabole est la droite verticale passant par le sommet, d'équation $x = 3$.

Les racines sont les abscisses des points où la courbe coupe l'axe des abscisses : on lit $x = 1$ et $x = 5$.

Contrôle de cohérence : les racines sont symétriques par rapport à l'axe, et en effet $\frac{1+5}{2} = 3$ ✔.

Signe : la courbe est SOUS l'axe avant 1 et après 5, AU-DESSUS entre 1 et 5.

Donc $f(x) < 0$ sur $[0\,;1[$ et sur $]5\,;6]$, $f(x) > 0$ sur $]1\,;5[$, et $f(x) = 0$ en $x = 1$ et $x = 5$.

Pour information, cette parabole a pour expression $f(x) = -2(x-3)^2 + 8$: on retrouve $f(1) = -2 \times 4 + 8 = 0$ ✔ et $f(0) = -18 + 8 = -10$, la valeur lue à gauche.

Réponse. $S(3\,;8)$, axe $x = 3$ · racines 1 et 5 · $f(x) > 0$ sur $]1\,;5[$, négatif à l'extérieur.

Rappel de cours. L'axe de symétrie passe par le sommet. Quand il y a deux racines, l'abscisse du sommet est leur MOYENNE.

Correction de l'exercice 5 – Trois écritures d'un même polynôme

Développement de f : $(x-1)(x-5) = x^2 - 5x - x + 5 = x^2 - 6x + 5$.

On multiplie par 2 : $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$.

Développement de g : $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$, donc $2(x-3)^2 = 2x^2 - 12x + 18$.

Puis $g(x) = 2x^2 - 12x + 18 - 8 = 2x^2 - 12x + 10$.

Les deux développements sont identiques : f et g sont la MÊME fonction, écrite sous deux formes différentes.

À quoi sert chaque forme ? La forme factorisée $2(x-1)(x-5)$ donne les racines d'un coup d'œil (1 et 5) ; la forme canonique $2(x-3)^2 - 8$ donne le sommet ($S(3\,;-8)$) ; la forme développée $2x^2 - 12x + 10$ donne l'ordonnée à l'origine (10).

Réponse. $f(x) = g(x) = 2x^2 - 12x + 10$: ce sont trois écritures de la même fonction (factorisée, canonique, développée).

Rappel de cours. Chaque forme répond à une question : factorisée → racines · canonique → sommet · développée → ordonnée à l'origine.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Développer $2(x-3)^2$ en $(2x-6)^2$: le coefficient 2 est devant le carré, il ne rentre pas dedans.

Correction de l'exercice 6 – Racines et signe d'une forme factorisée

$f(x) = 0$ équivaut à $-3(x+2)(x-4) = 0$. Comme $-3 \neq 0$, un produit est nul si l'un des facteurs l'est : $x+2=0$ ou $x-4=0$.

Les racines sont donc $x=-2$ et $x=4$.

Signe de chaque facteur : $x+2$ est négatif avant -2, positif après ; $x-4$ est négatif avant 4, positif après.

Sur $]-\infty\,;-2[$: $(-)\times(-)=(+)$, puis multiplié par -3 donne $(-)$. Donc $f(x)<0$.

Sur $]-2\,;4[$: $(+)\times(-)=(-)$, multiplié par -3 donne $(+)$. Donc $f(x)>0$.

Sur $]4\,;+\infty[$: $(+)\times(+)=(+)$, multiplié par -3 donne $(-)$. Donc $f(x)<0$.

Conclusion pour l'inéquation : $f(x)\geq 0$ sur l'intervalle $[-2\,;4]$, bornes incluses puisque $f(-2)=f(4)=0$.

Contrôle rapide : $f(0) = -3\times 2\times(-4) = 24 > 0$, et 0 est bien dans $[-2\,;4]$ ✔.

Réponse. Racines -2 et 4 · $f(x)>0$ sur $]-2\,;4[$, $f(x)<0$ à l'extérieur · $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-2\,;4]$.

Rappel de cours. Un polynôme de degré 2 est du signe de a à l'EXTÉRIEUR de ses racines, du signe contraire ENTRE elles.

Erreur fréquente. Oublier le coefficient -3, qui INVERSE tous les signes. Un test numérique en une valeur simple ($x=0$) permet de le repérer.

Correction de l'exercice 7 – Du sommet aux racines par symétrie

Les deux racines sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie $x=4$. La racine 1 est à distance $4-1=3$ à gauche de l'axe.

L'autre racine est donc à distance 3 à DROITE : $x = 4+3 = 7$.

Pour a, on utilise $f(1)=0$: $a(1-4)^2 - 9 = 0$, soit $9a-9=0$.

Donc $9a=9$ et $a=1$.

Forme factorisée : les racines sont 1 et 7, le coefficient dominant est $a=1$, d'où $f(x)=(x-1)(x-7)$.

Contrôle : on développe $(x-1)(x-7) = x^2-8x+7$, et on développe la forme canonique $(x-4)^2-9 = x^2-8x+16-9 = x^2-8x+7$ ✔ Les deux coïncident.

Réponse. Autre racine 7 · $a=1$ · $f(x)=(x-1)(x-7)$.

Rappel de cours. Abscisse du sommet $= \dfrac{x_1+x_2}{2}$: le sommet est toujours au MILIEU des racines.

Erreur fréquente. Prendre 7 comme « symétrique de 1 par rapport à 0 » : la symétrie se fait par rapport à l'AXE $x=4$, pas par rapport à l'origine.

Correction de l'exercice 8 – Résoudre (x − α)² = k

$(x-5)^2 = 16$: un carré vaut 16 si la quantité élevée au carré vaut 4 ou -4.

Donc $x-5=4$ ou $x-5=-4$, soit $x=9$ ou $x=1$.

$2(x+3)^2 = 50$: on isole d'abord le carré en divisant par 2, ce qui donne $(x+3)^2 = 25$.

Puis $x+3=5$ ou $x+3=-5$, soit $x=2$ ou $x=-8$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$(x-1)^2 = -4$: un carré est toujours POSITIF ou nul, il ne peut jamais valoir -4. L'équation n'a AUCUNE solution.

Contrôle : $(9-5)^2 = 16$ ✔ ; $2(2+3)^2 = 2 \times 25 = 50$ ✔ ; $2(-8+3)^2 = 2 \times 25 = 50$ ✔.

Lecture graphique de la troisième : la parabole $y = (x-1)^2$ a pour minimum 0, elle ne descend jamais jusqu'à -4.

Réponse. $x = 9$ ou $x = 1$ · $x = 2$ ou $x = -8$ · aucune solution pour la troisième.

Rappel de cours. $X^2 = k$: deux solutions $\pm\sqrt{k}$ si $k > 0$, une seule ($X = 0$) si $k = 0$, aucune si $k < 0$.

Erreur fréquente. N'écrire qu'une solution : $(x-5)^2 = 16$ donne AUSSI $x - 5 = -4$. Un carré efface le signe, il faut donc envisager les deux cas.

Correction de l'exercice 9 – Factoriser avec une identité remarquable

$A(x) = x^2 - 49 = x^2 - 7^2$: c'est une différence de deux carrés, donc $A(x) = (x-7)(x+7)$.

$A(x) = 0$ donne $x = 7$ ou $x = -7$.

$B(x) = 4x^2 - 12x$: les deux termes contiennent $4x$, donc $B(x) = 4x(x-3)$.

$B(x) = 0$ donne $4x = 0$ ou $x - 3 = 0$, soit $x = 0$ ou $x = 3$.

$C(x) = x^2 + 10x + 25$: on reconnaît $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 5$ (car $2 \times x \times 5 = 10x$ et $5^2 = 25$). Donc $C(x) = (x+5)^2$.

$C(x) = 0$ donne $(x+5)^2 = 0$, donc $x + 5 = 0$ et $x = -5$: une SEULE racine, dite double.

Graphiquement, la parabole de C est tangente à l'axe des abscisses en -5 : elle le touche sans le traverser. D'où le signe de C, positif partout sauf en -5 où il s'annule.

Réponse. $A(x) = (x-7)(x+7)$, racines ± 7 · $B(x) = 4x(x-3)$, racines 0 et 3 · $C(x) = (x+5)^2$, racine double -5.

Rappel de cours. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ · $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ · et toujours chercher le facteur commun d'abord.

Erreur fréquente. Oublier la racine $x = 0$ dans B en « simplifiant par x ». Diviser par x revient à supposer $x \neq 0$, donc à perdre une solution.

Correction de l'exercice 10 – Variations et extremum d'une parabole

Vérification : $-(x-3)^2 + 4 = -(x^2 - 6x + 9) + 4 = -x^2 + 6x - 9 + 4 = -x^2 + 6x - 5$ ✔ Les deux formes coïncident.

Le coefficient dominant est $a = -1 < 0$: la parabole est ouverte vers le BAS. Elle croît jusqu'au sommet, puis décroît.

Le sommet est $S(3\,;4)$, lu sur la forme canonique.

Tableau de variations : f est croissante sur $]-\infty\,;3]$, de $-\infty$ jusqu'à 4, puis décroissante sur $[3\,;+\infty[$, de 4 vers $-\infty$.

L'extremum est donc un MAXIMUM, égal à 4, atteint en $x = 3$.

Justification sans tableau : $(x-3)^2 \geq 0$ donc $-(x-3)^2 \leq 0$, d'où $f(x) \leq 4$ pour tout x, avec égalité seulement en $x = 3$.

Réponse. Croissante sur $]-\infty\,;3]$ puis décroissante sur $[3\,;+\infty[$ · maximum $f(3) = 4$.

Rappel de cours. $a < 0$: croissante puis décroissante, MAXIMUM au sommet. $a > 0$: l'inverse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Développer $-(x-3)^2$ en $-x^2-6x-9$: le signe « moins » porte sur TOUT le développement de $(x-3)^2$, soit $-x^2+6x-9$.

Correction de l'exercice 11 – Optimiser une aire clôturée

Le grillage couvre les DEUX largeurs et UNE seule longueur (le mur remplace l'autre). En notant L la longueur : $2x+L=60$, donc $L=60-2x$.

Aire : $A(x)=x\times L=x(60-2x)=60x-2x^2$.

Vérification de la forme canonique :
$-2(x-15)^2+450=-2(x^2-30x+225)+450=-2x^2+60x-450+450=-2x^2+60x$ ✔.

Comme $a=-2<0$, la fonction admet un MAXIMUM au sommet, atteint en $x=15$, et ce maximum vaut 450.

Dimensions optimales : largeur $x=15$ m et longueur $L=60-30=30$ m.

Aire maximale : 450 m². Contrôle : $15\times 30=450$ ✔.

Domaine de validité : il faut $x>0$ et $L>0$, donc $0<x<30$. La valeur $x=15$ est bien dans cet intervalle ✔.

Remarque : l'enclos optimal n'est pas un carré ! Avec un mur qui remplace un côté, la longueur vaut le DOUBLE de la largeur. Sans mur (périmètre 60 m), l'optimum serait le carré 15×15.

Réponse. $L=60-2x$, $A(x)=60x-2x^2$ · aire maximale 450 m² pour 15 m sur 30 m.

Rappel de cours. Optimiser une aire du second degré : on passe par la forme canonique, le sommet donne l'optimum.

Erreur fréquente. Écrire le périmètre $2x+2L=60$: un côté n'est pas grillagé, il n'entre pas dans les 60 m disponibles.

Correction de l'exercice 12 – Trajectoire d'un jet d'eau

Le jet est au sol quand $h(x)=0$: $-0{,}25x^2+2x=0$.

On factorise par x : $x(-0{,}25x+2)=0$, donc $x=0$ (la buse) ou $-0{,}25x+2=0$.

$-0{,}25x=-2$ donne $x=\dfrac{-2}{-0{,}25}=8$. Le jet retombe à 8 m.

La hauteur maximale est atteinte au sommet, c'est-à-dire au MILIEU des deux racines : $x=\dfrac{0+8}{2}=4$ m.

$h(4)=-0{,}25\times 16+8=-4+8=4$ m. Hauteur maximale : 4 m à 4 m de la buse.

À $x=6$: $h(6)=-0{,}25\times 36+12=-9+12=3$ m.

Or l'obstacle mesure 3,5 m et $3<3{,}5$: le jet NE passe PAS au-dessus, il heurte l'obstacle.

Pour information, la hauteur 3,5 m est franchie tant que $-0{,}25x^2+2x\geq 3{,}5$; en testant, $h(5)=-6{,}25+10=3{,}75>3{,}5$ et $h(6)=3<3{,}5$: l'obstacle aurait dû être placé à 5 m au plus.

Réponse. Retombée à 8 m · hauteur maximale 4 m atteinte à 4 m · à 6 m le jet n'est qu'à 3 m : il ne passe pas l'obstacle de 3,5 m.

Rappel de cours. Pour une trajectoire parabolique, le sommet est au milieu des deux points d'impact au sol : $x_S=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

Erreur fréquente. Croire que la hauteur maximale est atteinte à mi-portée seulement « par intuition ». C'est en réalité une conséquence de la symétrie de la parabole — et c'est faux dès que le départ et l'arrivée ne sont pas à la même hauteur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Intervalle de bénéfice

On développe la forme proposée : $(q-8)(q-42) = q^2 - 42q - 8q + 336 = q^2 - 50q + 336$.

En changeant le signe : $-(q-8)(q-42) = -q^2 + 50q - 336$ ✔ C'est bien $B(q)$.

L'atelier est bénéficiaire lorsque $B(q) > 0$. Les racines sont 8 et 42.

Comme le coefficient dominant est $-1 < 0$, le polynôme est POSITIF entre les racines : $B(q) > 0$ pour $8 < q < 42$.

Il faut produire entre 9 et 41 capteurs (les quantités sont entières) pour être bénéficiaire ; à 8 ou 42 capteurs, le bénéfice est nul (seuils de rentabilité).

Le maximum est atteint au sommet, au milieu des racines : $q = \dfrac{8+42}{2} = 25$.

$B(25) = -625 + 1\,250 - 336 = 289$ €.

Contrôle par la forme factorisée : $B(25) = -(25-8)(25-42) = -(17) \times (-17) = 289$ ✔ (et l'on voit apparaître 17^2, ce qui n'est pas un hasard : au sommet, les deux distances aux racines sont égales).

Cohérence avec le domaine : $q = 25$ appartient bien à $[0\,;60]$ ✔.

Réponse. $B(q) = -(q-8)(q-42)$ · bénéficiaire pour $8 < q < 42$ · maximum 289 € pour 25 capteurs par jour.

Rappel de cours. Signe d'un trinôme : du signe de a à l'extérieur des racines, du signe opposé entre elles.

Erreur fréquente. Conclure « bénéfice positif à l'extérieur de $[8\,;42]$ » en oubliant que $a = -1$ est négatif, ce qui inverse le schéma habituel.

Correction de l'exercice 14 – Rendement d'une installation

La forme est canonique : $a = -0{,}005 < 0$, sommet $S(70\,;92)$. Le rendement maximal est de 92%, atteint pour $p = 70$% de la puissance nominale.

$r(100) = -0{,}005 \times (100-70)^2 + 92 = -0{,}005 \times 900 + 92 = -4{,}5 + 92 = 87{,}5\%$.

$r(20) = -0{,}005 \times (20-70)^2 + 92 = -0{,}005 \times 2\,500 + 92 = -12{,}5 + 92 = 79{,}5\%$.

Le rendement chute donc bien plus à faible charge (79,5%) qu'à pleine charge (87,5%) : c'est le comportement réel d'un convertisseur, dont les pertes fixes pèsent lourd quand la puissance utile est faible.

Condition $r(p) \geq 90$: $-0{,}005(p-70)^2 + 92 \geq 90$, soit $-0{,}005(p-70)^2 \geq -2$.

On divise par $-0{,}005$, ce qui INVERSE l'inégalité : $(p-70)^2 \leq 400$.

Donc $|p-70| \leq 20$, c'est-à-dire $50 \leq p \leq 90$.

Contrôle aux bornes : $r(50) = -0{,}005 \times 400 + 92 = -2 + 92 = 90$ ✔, de même $r(90) = 90$ ✔.

Conclusion utile à l'exploitant : il faut dimensionner l'installation pour que le convertisseur travaille entre 50% et 90% de sa puissance nominale. Un convertisseur surdimensionné, donc peu chargé, sort de cette plage et perd plusieurs points de rendement.

Réponse. Maximum 92% à $p = 70$ · $r(100) = 87{,}5\%$ et $r(20) = 79{,}5\%$ · rendement $\geq 90\%$ pour $50 \leq p \leq 90$.

Rappel de cours. Une contrainte « $f(x) \geq s$ » sur une forme canonique se ramène toujours à $(x-\alpha)^2 \leq k$, donc à l'encadrement $\alpha - \sqrt{k} \leq x \leq \alpha + \sqrt{k}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Garder le sens de l'inégalité en divisant par $-0{,}005$: on obtiendrait $(p-70)^2 \geq 400$, c'est-à-dire exactement les puissances à ÉVITER.

Correction de l'exercice 15 – Intersection de deux courbes

Les courbes se coupent là où $f(x) = g(x)$: $x^2 - 2x + 3 = 4x - 5$.

On ramène tout d'un côté : $x^2 - 2x + 3 - 4x + 5 = 0$, soit $x^2 - 6x + 8 = 0$.

On factorise sans discriminant en complétant le carré :
$x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 9 + 8 = (x-3)^2 - 1$.

L'équation devient $(x-3)^2 = 1$, donc $x - 3 = 1$ ou $x - 3 = -1$, soit $x = 4$ ou $x = 2$.

Ordonnées correspondantes : $g(2) = 3$ et $g(4) = 11$. Les points d'intersection sont $(2\,;3)$ et $(4\,;11)$.

Position relative : on étudie le signe de
$f(x) - g(x) = (x-3)^2 - 1 = (x-3-1)(x-3+1) = (x-4)(x-2)$.

Ce produit est positif à l'extérieur de $[2\,;4]$ et négatif à l'intérieur.

Conclusion : la parabole de f est AU-DESSUS de la droite de g sur $]-\infty\,;2[$ et $]4\,;+\infty[$, et EN DESSOUS sur $]2\,;4[$. Elles se coupent en $x = 2$ et $x = 4$.

Contrôle en $x = 3$: $f(3) = 9 - 6 + 3 = 6$ et $g(3) = 7$. On a bien $f(3) < g(3)$ ✔.

Réponse. Intersections en $(2\,;3)$ et $(4\,;11)$ · parabole au-dessus de la droite hors de $[2\,;4]$, en dessous entre 2 et 4.

Rappel de cours. Position relative de deux courbes : on étudie le SIGNE de la différence $f(x) - g(x)$, pas les fonctions séparément.

Erreur fréquente. Comparer les expressions terme à terme. Seul le signe de la différence permet de conclure, et il change d'un intervalle à l'autre.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : bénéfice d'un atelier

Recette : $R(q) = 50q$.

Bénéfice : $B(q) = 50q - (q^2 + 10q + 200) = 50q - q^2 - 10q - 200 = -q^2 + 40q - 200$.

Forme canonique : on factorise le -1 sur les termes en q : $B(q) = -(q^2 - 40q) - 200$.

On complète le carré : $q^2 - 40q = (q-20)^2 - 400$, d'où
$B(q) = -[(q-20)^2 - 400] - 200 = -(q-20)^2 + 400 - 200$.

Donc $B(q) = -(q-20)^2 + 200$.

Comme $a = -1 < 0$, le maximum est atteint au sommet : production optimale $q = 20$ modules, pour un bénéfice de 200 € par jour.

Productions rentables : $B(q) > 0$ équivaut à $-(q-20)^2 + 200 > 0$, soit $(q-20)^2 < 200$.

Donc $|q - 20| < \sqrt{200}$. Or $\sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14$.

D'où $20 - 14{,}14 < q < 20 + 14{,}14$, soit $5{,}86 < q < 34{,}14$.

Les productions étant entières, l'atelier est bénéficiaire de 6 à 34 modules par jour.

Contrôle aux bornes : $B(6) = -196 + 200 = 4 > 0$ ✔ et $B(5) = -225 + 200 = -25 < 0$ ✔ ; $B(34) = -196 + 200 = 4 > 0$ ✔ et $B(35) = -225 + 200 = -25 < 0$ ✔.

Remarque : les deux seuils sont symétriques autour de 20, comme toujours pour une parabole.

Réponse. $R(q) = 50q$, $B(q) = -q^2 + 40q - 200 = -(q-20)^2 + 200$ · optimum de 200 € pour 20 modules · rentable de 6 à 34 modules.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Compléter le carré : $q^2 - 2\alpha q = (q-\alpha)^2 - \alpha^2$. C'est la méthode du programme, sans discriminant.

Erreur fréquente. Oublier le signe moins devant le crochet en développant $-[(q-20)^2 - 400]$: on obtient $+400$, pas -400.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : déterminer une parabole à partir d'un graphique

Les points $(0\,;0)$ et $(12\,;0)$ sont les deux racines. Le sommet est à leur milieu : $x_S = \dfrac{0+12}{2} = 6$.

Le sommet est donc $S(6\,;9)$, et la forme canonique s'écrit $f(x) = a(x-6)^2 + 9$.

On détermine a avec un point connu, par exemple $f(0) = 0$: $a(0-6)^2 + 9 = 0$, soit $36a + 9 = 0$.

$36a = -9$, donc $a = -\dfrac{9}{36} = -0{,}25$.

Forme canonique : $f(x) = -0{,}25(x-6)^2 + 9$.

Développement : $(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$, donc $f(x) = -0{,}25x^2 + 3x - 9 + 9 = -0{,}25x^2 + 3x$.

Contrôle : $f(12) = -0{,}25 \times 144 + 36 = -36 + 36 = 0$ ✔ et $f(6) = -9 + 18 = 9$ ✔.

$f(3) = -0{,}25 \times 9 + 9 = -2{,}25 + 9 = 6{,}75$ cm.

$f(10) = -0{,}25 \times 100 + 30 = -25 + 30 = 5$ cm.

Contrôle de cohérence : $f(3) = 6{,}75$ doit égaler $f(9)$ par symétrie autour de $x = 6$, et $f(9) = -0{,}25 \times 81 + 27 = -20{,}25 + 27 = 6{,}75$ ✔.

Réponse. Sommet en $x = 6$ · $f(x) = -0{,}25(x-6)^2 + 9 = -0{,}25x^2 + 3x$ · hauteurs 6,75 cm à 3 cm et 5 cm à 10 cm.

Rappel de cours. Deux racines connues ⇒ le sommet est à leur milieu. Un troisième point donne alors le coefficient a.

Erreur fréquente. Prendre $a = 9$ « parce que la hauteur est 9 ». Le 9 est l'ordonnée du sommet (β), pas le coefficient dominant.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : deux tôles, une même aire

Première pièce : le carré de côté x moins le carré de côté 4, donc $A_1(x) = x^2 - 16$.

Seconde pièce : $A_2(x) = 6x$.

Égalité des aires : $x^2 - 16 = 6x$, soit $x^2 - 6x - 16 = 0$.

Complétons le carré : $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$, donc l'équation devient $(x-3)^2 - 9 - 16 = 0$, soit $(x-3)^2 = 25$.

D'où $x - 3 = 5$ ou $x - 3 = -5$, soit $x = 8$ ou $x = -2$.

La contrainte $x > 4$ élimine $x = -2$: la seule solution acceptable est $x = 8$ cm.

Contrôle : $A_1(8) = 64 - 16 = 48$ cm² et $A_2(8) = 48$ cm² ✔.

Pour comparer, on étudie le signe de $A_1(x) - A_2(x) = x^2 - 6x - 16 = (x-3)^2 - 25 = (x-8)(x+2)$.

Sur le domaine $x > 4$, le facteur $(x+2)$ est positif : le signe est celui de $(x-8)$.

Donc la première pièce est plus grande pour $x > 8$, plus petite pour $4 < x < 8$, et les deux

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

sont égales en $x = 8$.

Cohérence : pour $x = 5$, $A_1 = 9$ cm² contre $A_2 = 30$ cm² ✔ ; pour $x = 10$, $A_1 = 84$ cm² contre 60 cm² ✔.

Réponse. $A_1(x) = x^2 - 16$, $A_2(x) = 6x$ · même aire pour $x = 8$ cm · première pièce plus grande pour $x > 8$.

Rappel de cours. Une contrainte géométrique ($x > 4$) sert à ÉLIMINER les solutions mathématiques non recevables.

Erreur fréquente. Garder $x = -2$ comme longueur. Toute solution doit être confrontée au domaine imposé par la situation.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : tableau de signes complet

On factorise d'abord 0,5 : $e(t) = 0{,}5(t^2 - 8t + 12)$.

On complète le carré dans la parenthèse : $t^2 - 8t = (t-4)^2 - 16$, donc $t^2 - 8t + 12 = (t-4)^2 - 4$.

C'est une différence de carrés : $(t-4)^2 - 2^2 = (t - 4 - 2)(t - 4 + 2) = (t-6)(t-2)$.

Donc $e(t) = 0{,}5(t-2)(t-6)$. Les racines sont $t = 2$ et $t = 6$.

Contrôle par développement : $0{,}5(t^2 - 8t + 12) = 0{,}5t^2 - 4t + 6$ ✔.

Tableau de signes sur $[0\,;10]$: le coefficient 0,5 est positif, donc $e(t) > 0$ à l'extérieur de $[2\,;6]$ et $e(t) < 0$ entre 2 et 6.

Concrètement : réglage trop lâche sur $[0\,;2[$ et $]6\,;10]$, trop serré sur $]2\,;6[$, correct exactement à $t = 2$ h et $t = 6$ h.

Le réglage le plus serré correspond au MINIMUM de e, atteint au sommet, au milieu des racines : $t = \dfrac{2+6}{2} = 4$ h.

$e(4) = 0{,}5 \times 16 - 16 + 6 = 8 - 16 + 6 = -2$.

À $t = 4$ h, l'écart vaut -2 dixièmes de millimètre : c'est le moment le plus critique, à 0,2 mm en dessous de la cote.

Contrôle par la forme factorisée : $e(4) = 0{,}5 \times 2 \times (-2) = -2$ ✔.

Réponse. $e(t) = 0{,}5(t-2)(t-6)$ · positif sur $[0\,;2[\cup]6\,;10]$, négatif sur $]2\,;6[$ · réglage le plus serré à $t = 4$ h, écart -2 dixièmes de mm.

Rappel de cours. Méthode sans discriminant : factoriser le coefficient dominant, compléter le carré, puis reconnaître $A^2 - B^2$.

Erreur fréquente. Factoriser 0,5 seulement sur une partie des termes : $0{,}5t^2 - 4t + 6 = 0{,}5(t^2 - 8t + 12)$ — il faut diviser les TROIS coefficients par 0,5.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : encadrer une cote de fabrication

On factorise -2 : $f(x) = -2(x^2 - 10x + 16)$.

On complète le carré : $x^2 - 10x = (x-5)^2 - 25$, donc $x^2 - 10x + 16 = (x-5)^2 - 9$.

D'où $f(x) = -2[(x-5)^2 - 9] = -2(x-5)^2 + 18$.

Contrôle : $-2(x^2 - 10x + 25) + 18 = -2x^2 + 20x - 50 + 18 = -2x^2 + 20x - 32$ ✔.

Le coefficient -2 est négatif : la résistance maximale vaut 18, atteinte pour une épaisseur de 5 mm.

Condition du cahier des charges : $f(x) \geq 16$, soit $-2(x-5)^2 + 18 \geq 16$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$-2(x-5)^2 \geq -2$, puis en divisant par -2 (ce qui INVERSE l'inégalité) : $(x-5)^2 \leq 1$.

Donc $|x-5| \leq 1$, c'est-à-dire $4 \leq x \leq 6$.

Les épaisseurs acceptables vont de 4 mm à 6 mm — un intervalle bien plus étroit que le domaine $]0\,;10[$.

Les entretoises de 3,5 mm : $3{,}5 < 4$, elles ne conviennent PAS. Vérification : $f(3{,}5) = -2 \times 12{,}25 + 70 - 32 = -24{,}5 + 38 = 13{,}5 < 16$ ✔ la résistance est insuffisante.

Remarque pour la fabrication : la cote visée est 5 mm avec une tolérance de ±1 mm. Écrire la condition sous la forme $|x-5| \leq 1$ donne directement la cote nominale et sa tolérance — c'est exactement le langage d'un plan de fabrication.

Réponse. $f(x) = -2(x-5)^2 + 18$, maximum 18 à 5 mm · épaisseurs acceptables $[4\,;6]$ mm · 3,5 mm ne convient pas (résistance 13,5).

Rappel de cours. Diviser une inégalité par un nombre NÉGATIF change son sens : $-2A \geq -2 \Leftrightarrow A \leq 1$.

Erreur fréquente. Garder le sens de l'inégalité en divisant par -2 : on obtiendrait $(x-5)^2 \geq 1$, soit exactement l'ensemble des épaisseurs à REJETER.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).