Fonctions et polynômes du second degré — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Un polynôme du second degré, c'est la forme que prend presque toute grandeur qu'on cherche à OPTIMISER : la portée d'un jet, l'aire maximale d'une surface à clôturer, le bénéfice d'un atelier, le rendement d'une installation. Sa courbe est une parabole, et tout l'enjeu du chapitre est de lire dessus trois choses : son sommet (le maximum ou le minimum), ses racines (là où elle coupe l'axe) et son signe. En STI2D, ce travail se fait SANS discriminant : on factorise, ou on part de la forme canonique et on résout $(x-\alpha)^2 = k$. Ces 20 exercices corrigés suivent ce chemin, du calcul d'images au problème d'optimisation type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/fonctions-polynomes-second-degre

Exercice 1 – Images et antécédents

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

1. Calcule $f(0)$, $f(2)$ et $f(-1)$.

2. Vérifie que 1 est un antécédent de -2 par f.

Exercice 2 – Taux de variation moyen

La puissance dissipée par une résistance, en watts, est $P(i) = 5i^2$ où i est l'intensité en ampères.

1. Calcule le taux de variation moyen de P entre $i = 1$ et $i = 3$.

2. Calcule-le entre $i = 3$ et $i = 5$, puis compare.

Exercice 3 – Sommet et sens de variation depuis la forme canonique

Trois fonctions sont données sous forme canonique : $f(x) = (x-3)^2 + 2$, $g(x) = -2(x+1)^2 + 8$ et $h(x) = 4(x-5)^2$.

1. Donne les coordonnées du sommet de chaque parabole.

2. Précise dans chaque cas s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, et sa valeur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

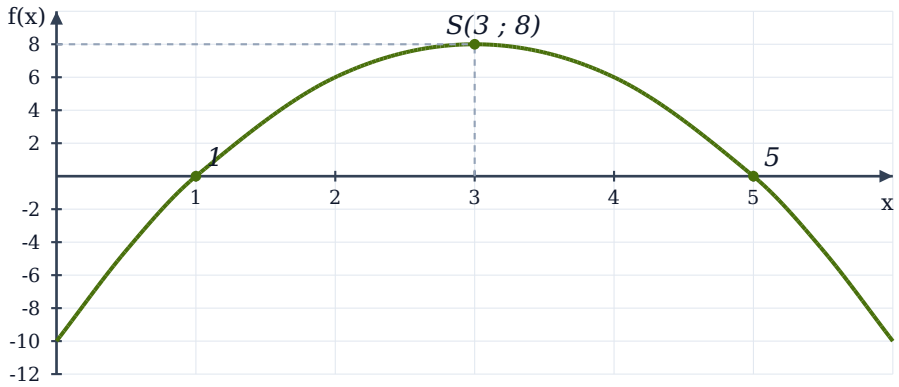
Exercice 4 – Lire une parabole

La courbe représente une fonction polynôme du second degré f sur l'intervalle $[0\,;6]$.

1. Donne les coordonnées du sommet et l'équation de l'axe de symétrie.

2. Lis les racines de f (les valeurs où $f(x) = 0$).

3. Donne le signe de $f(x)$ selon x.



Exercice 5 – Trois écritures d'un même polynôme

On considère $f(x) = 2(x-1)(x-5)$ et $g(x) = 2(x-3)^2 - 8$.

1. Développe et réduis $f(x)$, puis $g(x)$.

2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6 – Racines et signe d'une forme factorisée

Soit $f(x) = -3(x+2)(x-4)$.

1. Détermine les racines de f.

2. Dresse le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Résous l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 7 – Du sommet aux racines par symétrie

Une fonction polynôme du second degré f a pour sommet $S(4\,;-9)$ et admet 1 comme racine.

1. Détermine l'autre racine de f.

2. Sachant que $f(x) = a(x-4)^2 - 9$, détermine a.

3. Donne la forme factorisée de f.

Exercice 8 – Résoudre $(x-\alpha)^2 = k$

On veut résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations $(x-5)^2 = 16$, $2(x+3)^2 = 50$ et $(x-1)^2 = -4$.

1. Résous chacune de ces trois équations.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Factoriser avec une identité remarquable

On considère $A(x) = x^2 - 49$, $B(x) = 4x^2 - 12x$ et $C(x) = x^2 + 10x + 25$.

1. Factorise chacune de ces expressions.

2. Résous $A(x) = 0$, $B(x) = 0$ et $C(x) = 0$.

Exercice 10 – Variations et extremum d'une parabole

Soit $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. On donne sa forme canonique : $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$.

1. Vérifie l'égalité des deux formes.

2. Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Donne l'extremum de f et précise sa nature.

Exercice 11 – Optimiser une aire clôturée

On dispose de 60 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire contre un mur (le mur constitue l'un des grands côtés, il n'est pas grillagé). On note x la largeur de l'enclos, en mètres.

1. Exprime la longueur puis l'aire $A(x)$ de l'enclos en fonction de x.

2. On donne $A(x) = -2(x - 15)^2 + 450$. Vérifie-le.

3. Quelles dimensions donnent l'aire maximale, et quelle est cette aire ?

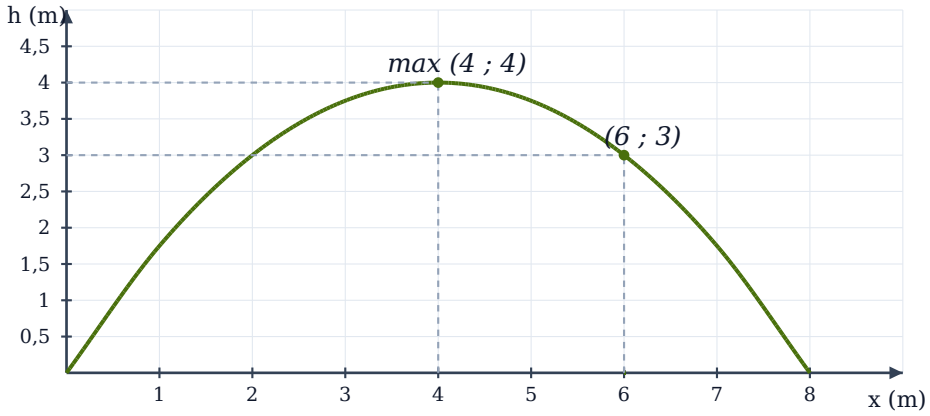
Exercice 12 – Trajectoire d'un jet d'eau

La hauteur d'un jet d'eau, en mètres, est donnée par $h(x) = -0{,}25x^2 + 2x$, où x est la distance horizontale en mètres depuis la buse.

1. Détermine à quelle distance le jet retombe au sol.

2. Calcule la hauteur maximale atteinte et la distance correspondante.

3. Le jet passe-t-il au-dessus d'un obstacle de 3,5 m de haut situé à 6 m de la buse ?



Exercice 13 – Intervalle de bénéfice

Un atelier fabrique q capteurs par jour ($0 \le q \le 60$). Son bénéfice quotidien, en euros, est $B(q) = -q^2 + 50q - 336$.

1. Vérifie que $B(q) = -(q - 8)(q - 42)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Détermine les quantités pour lesquelles l'atelier est bénéficiaire.

3. Détermine la production qui maximise le bénéfice et le bénéfice correspondant.

Exercice 14 – Rendement d'une installation

Le rendement d'un convertisseur, en pourcentage, est modélisé par $r(p) = -0{,}005(p-70)^2 + 92$, où p est la puissance de sortie exprimée en pourcentage de la puissance nominale, avec $20 \leq p \leq 100$.

1. Quel est le rendement maximal et pour quelle puissance ?

2. Calcule le rendement à pleine charge ($p = 100$) et à $p = 20$.

3. Pour quelles puissances le rendement atteint-il au moins 90% ?

Exercice 15 – Intersection de deux courbes

Soient $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = 4x - 5$, définies sur $\mathbb{R}$.

1. Détermine les abscisses des points d'intersection de leurs représentations graphiques.

2. Étudie la position relative des deux courbes.

Exercice 16 – Type bac : bénéfice d'un atelier

Un atelier produit q modules photovoltaïques par jour, $0 \leq q \leq 40$. Le coût total de production, en euros, est $C(q) = q^2 + 10q + 200$, et chaque module est vendu 50 €.

1. Exprime la recette $R(q)$ puis le bénéfice $B(q)$.

2. Mets $B(q)$ sous forme canonique et détermine la production optimale.

3. Détermine, par le calcul, l'intervalle des productions rentables.

Exercice 17 – Type bac : déterminer une parabole à partir d'un graphique

Une pièce en tôle a un bord supérieur parabolique. Dans un repère en centimètres, ce bord passe par les points $(0\,;0)$ et $(12\,;0)$, et son point le plus haut est à 9 cm de hauteur.

1. Détermine l'abscisse du sommet.

2. Détermine l'expression de la fonction f décrivant ce bord, sous forme canonique puis développée.

3. Calcule la hauteur du bord à 3 cm et à 10 cm du bord gauche.

Exercice 18 – Type bac : deux tôles, une même aire

Dans une plaque carrée de côté x cm ($x > 4$), on découpe un carré de côté 4 cm dans un coin. Une seconde pièce est un rectangle de dimensions x cm par 6 cm.

1. Exprime l'aire $A_1(x)$ de la première pièce et $A_2(x)$ de la seconde.

2. Détermine les valeurs de x pour lesquelles les deux pièces ont la même aire.

3. Pour quelles valeurs de x la première pièce est-elle la plus grande ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Type bac : tableau de signes complet

L'écart de réglage d'une machine, en dixièmes de millimètre, est modélisé par $e(t) = 0{,}5t^2 - 4t + 6$, où t est le temps en heures depuis la mise en route, $0 \leq t \leq 10$. Un écart négatif signifie un réglage trop serré, un écart positif un réglage trop lâche.

1. Factorise $e(t)$.

2. Dresse le tableau de signes de $e(t)$ sur $[0\,;10]$.

3. Détermine le moment où le réglage est le plus serré et l'écart correspondant.

Exercice 20 – Type bac : encadrer une cote de fabrication

La résistance mécanique d'une entretoise, en unités arbitraires, dépend de son épaisseur x (en mm) selon $f(x) = -2x^2 + 20x - 32$, pour $0 < x < 10$. Le cahier des charges exige une résistance d'au moins 16.

1. Mets $f(x)$ sous forme canonique et donne la résistance maximale.

2. Détermine l'intervalle des épaisseurs acceptables.

3. Un fournisseur propose des entretoises de 3,5 mm. Conviennent-elles ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).