Nombres complexes — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Les nombres complexes servent à écrire d'un seul coup deux informations : une AMPLITUDE et un DÉPHASAGE. C'est exactement ce dont on a besoin en régime sinusoïdal, où l'impédance $Z = R + jX$ résume tout le comportement d'un circuit — son module donne le rapport entre tension et courant, son argument donne le déphasage entre eux. Le chapitre part donc du calcul algébrique ($i^2 = -1$, conjugué, quotient) pour arriver au module et à l'argument, c'est-à-dire à la forme trigonométrique. Ces 20 exercices corrigés suivent ce chemin, du calcul direct au problème type bac sur un circuit RL ou une composition de signaux. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/nombres-complexes

Exercice 1 – Somme et produit de complexes

On considère $z_1 = 3 + 5i$ et $z_2 = 4 - 2i$.

1. Calcule $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

2. Calcule $z_1 \times z_2$.

Exercice 2 – Puissances de i

On rappelle que $i^2 = -1$.

1. Calcule i^3, i^4 et i^5.

2. Calcule i^{2026}.

Exercice 3 – Conjugué, partie réelle et imaginaire

On considère $z = -2 + 7i$, $z' = 5$ et $z'' = -3i$.

1. Donne la partie réelle et la partie imaginaire de chacun.

2. Donne leur conjugué.

Exercice 4 – Calculer un module

On considère $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -5 + 12i$ et $z_3 = -6$.

1. Calcule le module de chacun de ces complexes.

Exercice 5 – Affixe d'un point et d'un vecteur

Dans le plan complexe, A a pour affixe $z_A = 2 + 3i$ et B a pour affixe $z_B = 6 - i$.

1. Donne les coordonnées des points A et B.

2. Détermine l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis la distance AB.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Quotient de deux complexes

On veut écrire $Z = \dfrac{5+10i}{1+2i}$ sous forme algébrique.

1. Effectue le calcul en multipliant par le conjugué du dénominateur.

2. Même travail pour $Z' = \dfrac{3}{2-i}$.

Exercice 7 – Résoudre une équation du premier degré

On cherche le complexe z vérifiant $(2+i)z = 5-5i$.

1. Résous cette équation.

2. Résous ensuite $3z + 2i = z - 4$.

Exercice 8 – Module d'un produit et d'un quotient

On donne $z_1 = 3+4i$ (de module 5) et $z_2 = 1-i$.

1. Calcule $|z_2|$.

2. Calcule $|z_1 z_2|$ et $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ sans effectuer les opérations.

3. Vérifie le premier résultat par le calcul direct.

Exercice 9 – Forme trigonométrique

On considère $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2i$ et $z_3 = -3$.

1. Écris chacun sous forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Exercice 10 – De la forme trigonométrique à l'algébrique

On donne $z_1 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $z_2 = 6\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

1. Écris z_1 et z_2 sous forme algébrique.

Exercice 11 – Argument d'un produit

On donne $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1. Donne le module et un argument de $z_1 z_2$.

2. Donne le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

3. Écris $z_1 z_2$ sous forme trigonométrique.

Exercice 12 – Équation du type z² = k

On cherche les solutions complexes de $z^2 + 25 = 0$, puis de $4z^2 + 9 = 0$.

1. Résous ces deux équations dans $\mathbb{C}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Distance et interprétation géométrique

Dans le plan complexe, A, B et C ont pour affixes $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 5 + 4i$ et $z_C = 3 + 6i$.

1. Calcule les longueurs AB, BC et AC.

2. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 14 – Impédance complexe

En électricité, l'impédance d'un dipôle s'écrit $Z = R + jX$, où R est la résistance et X la réactance, en ohms (les électriciens notent j ce que les mathématiciens notent i). On considère $Z = 30 + 40j$.

1. Calcule le module $|Z|$ et interprète-le.

2. Calcule l'argument de Z, arrondi au degré, et interprète-le.

3. Si le courant a une amplitude de 2 A, quelle est l'amplitude de la tension ?

Exercice 15 – Conjugué et parties réelle et imaginaire

On considère $Z = \dfrac{2 + i}{3 - i}$.

1. Écris Z sous forme algébrique.

2. Calcule $Z + \overline{Z}$ et $Z \times \overline{Z}$, et vérifie que ce sont des réels.

Exercice 16 – Type bac : circuit RL série

Un circuit RL série comporte une résistance $R = 100\ \Omega$ et une bobine d'inductance $L = 0{,}2$ H. Il est alimenté à la fréquence $f = 50$ Hz. L'impédance complexe vaut $Z = R + jL\omega$, avec $\omega = 2\pi f$.

1. Calcule ω puis la réactance $L\omega$, arrondie à l'unité.

2. Donne Z sous forme algébrique, puis calcule $|Z|$.

3. Calcule le déphasage $\varphi = \arg(Z)$, arrondi au degré.

4. Pour une tension d'amplitude 325 V, calcule l'amplitude du courant.

Exercice 17 – Type bac : ensemble de points

Dans le plan complexe, A a pour affixe $z_A = 2 - i$. On cherche l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 2 + i| = 3$.

1. Écris la condition sous la forme $|z - z_A| = 3$.

2. Décris l'ensemble des points M.

3. Le point B d'affixe $5 - i$ appartient-il à cet ensemble ? Et C d'affixe $2 + 3i$?

Exercice 18 – Type bac : calcul complet avec conjugué

On considère $Z = \dfrac{(1 + 2i)(3 - i)}{2 + i}$.

1. Calcule le numérateur sous forme algébrique.

2. Écris Z sous forme algébrique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Calcule $|Z|$ de deux façons.

Exercice 19 – Type bac : composition de deux signaux

Deux tensions de même pulsation sont représentées par les complexes $Z_1 = 40\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ et $Z_2 = 30(\cos 0 + i\sin 0)$ (amplitudes en volts, arguments donnant les phases).

1. Donne Z_1 et Z_2 sous forme algébrique.

2. Calcule $Z = Z_1 + Z_2$ sous forme algébrique.

3. Donne l'amplitude et la phase de la tension résultante.

Exercice 20 – Type bac : carré et forme trigonométrique

On considère $z = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Calcule $|z|$ et détermine un argument de z.

2. Écris z sous forme trigonométrique.

3. En déduire le module et un argument de z^2, puis z^2 sous forme algébrique.

4. Vérifie par le calcul direct de z^2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Somme et produit de complexes

Pour la somme, on ajoute séparément les parties réelles et les parties imaginaires.

$z_1 + z_2 = (3+4) + (5-2)i = 7 + 3i$.

$z_1 - z_2 = (3-4) + (5-(-2))i = -1 + 7i$.

Pour le produit, on développe comme avec des réels, puis on remplace i^2 par -1.

$z_1 z_2 = (3+5i)(4-2i) = 12 - 6i + 20i - 10i^2$.

$-10i^2 = -10 \times (-1) = +10$, donc $z_1 z_2 = 12 + 10 + 14i = 22 + 14i$.

Contrôle du terme imaginaire : $-6i + 20i = 14i$ ✔.

Réponse. $z_1 + z_2 = 7 + 3i \cdot z_1 - z_2 = -1 + 7i \cdot z_1 z_2 = 22 + 14i$.

Rappel de cours. $i^2 = -1$. Tout le calcul algébrique habituel reste valable, à cette substitution près.

Erreur fréquente. Laisser $-10i^2$ tel quel ou l'écrire -10 : comme $i^2 = -1$, ce terme vaut $+10$, et il change la partie réelle.

Correction de l'exercice 2 – Puissances de i

$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$.

$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$.

$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$.

Les puissances de i se répètent donc par cycles de 4 : i, -1, $-i$, 1, puis à nouveau i…

Pour i^{2026}, on divise l'exposant par 4 : $2026 = 4 \times 506 + 2$.

Donc $i^{2026} = \left(i^4\right)^{506} \times i^2 = 1^{506} \times (-1) = -1$.

Méthode générale : seul le RESTE de la division de l'exposant par 4 compte.

Réponse. $i^3 = -i \cdot i^4 = 1 \cdot i^5 = i \cdot i^{2026} = -1$ (car $2026 = 4 \times 506 + 2$).

Rappel de cours. Cycle de longueur 4 : $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.

Erreur fréquente. Écrire $i^4 = -1$: c'est i^2 qui vaut -1 ; le carré de -1 redonne $+1$.

Correction de l'exercice 3 – Conjugué, partie réelle et imaginaire

Un complexe s'écrit $z = a + bi$: a est sa partie réelle (notée $\mathrm{Re}(z)$), b sa partie imaginaire (notée $\mathrm{Im}(z)$).

$z = -2 + 7i$: $\mathrm{Re}(z) = -2$ et $\mathrm{Im}(z) = 7$.

$z' = 5 = 5 + 0i$: $\mathrm{Re}(z') = 5$ et $\mathrm{Im}(z') = 0$. C'est un RÉEL.

$z'' = -3i = 0 - 3i$: $\mathrm{Re}(z'') = 0$ et $\mathrm{Im}(z'') = -3$. C'est un IMAGINAIRE PUR.

Le conjugué s'obtient en changeant le signe de la partie imaginaire : $\overline{z} = -2 - 7i$.

$\overline{z'} = 5$ (un réel est son propre conjugué) et $\overline{z''} = 3i$.

Attention : la partie imaginaire est un NOMBRE RÉEL, pas « $7i$ ». On écrit $\mathrm{Im}(z) = 7$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. z : -2 et 7, conjugué $-2-7i$ · z' : 5 et 0, conjugué 5 · z'' : 0 et -3, conjugué $3i$.

Rappel de cours. $\overline{a+bi} = a-bi$: seul le signe de la partie imaginaire change.

Erreur fréquente. Répondre « Im(z) = $7i$ ». La partie imaginaire est le COEFFICIENT de i, donc un réel.

Correction de l'exercice 4 – Calculer un module

Le module de $z = a+bi$ est $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$: c'est la distance de l'origine au point d'affixe z.

$|z_1| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

$|z_2| = \sqrt{(-5)^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$.

$|z_3| = \sqrt{(-6)^2+0^2} = \sqrt{36} = 6$.

Pour un réel, le module coïncide avec la valeur absolue : $|-6| = 6$ ✔ — ce qui justifie la même notation.

Un module est toujours POSITIF ou nul, même quand les parties réelle et imaginaire sont négatives.

Réponse. $|z_1| = 5$ · $|z_2| = 13$ · $|z_3| = 6$.

Rappel de cours. $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, toujours positif. Un module nul caractérise $z = 0$.

Erreur fréquente. Écrire $|-5+12i| = -5+12 = 7$: le module n'est pas une somme, c'est une racine de somme de CARRÉS.

Correction de l'exercice 5 – Affixe d'un point et d'un vecteur

L'affixe $a+bi$ correspond au point de coordonnées $(a\,;b)$.

Donc $A(2\,;3)$ et $B(6\,;-1)$.

L'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la différence $z_B - z_A$ (arrivée moins départ).

$z_{\overrightarrow{AB}} = (6-i)-(2+3i) = 4-4i$.

La distance AB est le module de cette affixe : $AB = |4-4i| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

$4\sqrt{2} \approx 5{,}66$.

Contrôle par les coordonnées : $AB = \sqrt{(6-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ ✔ — les deux méthodes sont la même.

Réponse. $A(2\,;3)$ et $B(6\,;-1)$ · $z_{\overrightarrow{AB}} = 4-4i$ et $AB = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$.

Rappel de cours. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$: le module d'une différence est une DISTANCE.

Erreur fréquente. Calculer $z_A - z_B$: on obtient l'affixe de $\overrightarrow{BA}$, c'est-à-dire l'opposé (la distance, elle, est inchangée).

Correction de l'exercice 6 – Quotient de deux complexes

Méthode : on multiplie numérateur et dénominateur par le CONJUGUÉ du dénominateur, ce qui rend le dénominateur réel.

$$Z = \frac{(5+10i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}.$$

Dénominateur : $(1+2i)(1-2i) = 1^2-(2i)^2 = 1-4i^2 = 1+4 = 5$.

Numérateur : $(5+10i)(1-2i) = 5-10i+10i-20i^2 = 5+20 = 25$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc $Z = \frac{25}{5} = 5$: le quotient est un RÉEL (les termes en i se sont compensés).

Pour Z' : $Z' = \frac{3(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i}{4+1} = \frac{6+3i}{5}$.

Donc $Z' = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}i = 1{,}2 + 0{,}6i$.

Contrôle : $Z' \times (2-i) = (1{,}2 + 0{,}6i)(2-i) = 2{,}4 - 1{,}2i + 1{,}2i - 0{,}6i^2 = 2{,}4 + 0{,}6 = 3$ ✔.

Réponse. $Z = 5 \cdot Z' = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}i = 1{,}2 + 0{,}6i$.

Rappel de cours. $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$: le produit d'un complexe par son conjugué est un RÉEL positif.

Erreur fréquente. Multiplier par le conjugué du NUMÉRATEUR : le dénominateur resterait complexe, et le calcul n'avancerait pas.

Correction de l'exercice 7 – Résoudre une équation du premier degré

On isole z en divisant par $(2+i)$: $z = \frac{5-5i}{2+i}$.

On multiplie par le conjugué : $z = \frac{(5-5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{10 - 5i - 10i + 5i^2}{4+1}$.

Numérateur : $10 - 5 - 15i = 5 - 15i$. Dénominateur : 5.

Donc $z = \frac{5-15i}{5} = 1 - 3i$.

Contrôle : $(2+i)(1-3i) = 2 - 6i + i - 3i^2 = 2 + 3 - 5i = 5 - 5i$ ✔.

Seconde équation : on regroupe les z d'un côté. $3z - z = -4 - 2i$, soit $2z = -4 - 2i$.

$z = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i$.

Contrôle : $3(-2-i) + 2i = -6 - 3i + 2i = -6 - i$, et $(-2-i) - 4 = -6 - i$ ✔.

Réponse. $z = 1 - 3i \cdot z = -2 - i$.

Rappel de cours. Une équation du premier degré dans $\mathbb{C}$ se résout comme dans $\mathbb{R}$: on isole z, puis on met le quotient sous forme algébrique.

Erreur fréquente. Arrêter la réponse à $z = \frac{5-5i}{2+i}$: ce n'est pas une forme algébrique. Il faut toujours terminer en $a + bi$.

Correction de l'exercice 8 – Module d'un produit et d'un quotient

$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Propriété : le module d'un produit est le produit des modules. Donc $|z_1 z_2| = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$.

De même pour le quotient : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54$.

Vérification directe : $z_1 z_2 = (3+4i)(1-i) = 3 - 3i + 4i - 4i^2 = 3 + 4 + i = 7 + i$.

$|7+i| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ✔ Les deux méthodes concordent.

Intérêt de la propriété : elle évite de développer le produit quand seul le module intéresse — situation très fréquente en électricité, où l'on cherche une amplitude.

Réponse. $|z_2| = \sqrt{2} \cdot |z_1 z_2| = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07 \cdot \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}54$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. $|zz'| = |z|\,|z'|$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. En revanche $|z+z'| \neq |z| + |z'|$ en général.

Erreur fréquente. Appliquer la propriété à une SOMME : $|z_1 + z_2| = |4+3i| = 5$, alors que $|z_1| + |z_2| = 5 + \sqrt{2} \approx 6{,}41$. Les modules ne s'additionnent pas.

Correction de l'exercice 9 – Forme trigonométrique

Pour $z_1 = 1 + i$: $r = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

On cherche θ tel que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$: c'est $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Donc $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Pour $z_2 = 2i$: $r = 2$, et le point est sur l'axe des ordonnées, vers le haut, donc $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Pour $z_3 = -3$: $r = 3$, et le point est sur l'axe des réels NÉGATIFS, donc $\theta = \pi$.

$z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Contrôle de z_3 : $3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1+0i) = -3$ ✔.

Réponse. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ · $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ · $z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Rappel de cours. $r = |z|$ puis $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$: il faut les DEUX pour déterminer θ sans ambiguïté.

Erreur fréquente. Prendre $\theta = 0$ pour $z_3 = -3$ en oubliant le signe : le module doit être positif, c'est l'argument qui porte le signe ($\theta = \pi$).

Correction de l'exercice 10 – De la forme trigonométrique à l'algébrique

Pour z_1 : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$z_1 = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$.

Valeur approchée : $z_1 \approx 2 + 3{,}46i$.

Pour z_2 : $\frac{5\pi}{6} = 150°$, donc $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

$z_2 = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -3\sqrt{3} + 3i \approx -5{,}20 + 3i$.

Contrôle des modules : $|z_1| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$ ✔ et $|z_2| = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6$ ✔.

Réponse. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i \approx 2 + 3{,}46i$ · $z_2 = -3\sqrt{3} + 3i \approx -5{,}20 + 3i$.

Rappel de cours. $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$: c'est le passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique.

Erreur fréquente. Distribuer le module sur un seul terme : il multiplie À LA FOIS le cosinus et le sinus.

Correction de l'exercice 11 – Argument d'un produit

Règle du produit : les modules se MULTIPLIENT, les arguments s'AJOUTENT.

$|z_1 z_2| = 2 \times 3 = 6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$.

Règle du quotient : les modules se divisent, les arguments se RETRANCHENT.

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{2}{3}$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi - 3\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}$.

Forme trigonométrique du produit : $z_1 z_2 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

Vérification numérique : $\frac{5\pi}{12} = 75°$, donc $z_1 z_2 \approx 6(0{,}2588 + 0{,}9659i) \approx 1{,}553 + 5{,}796i$.

Par le calcul direct : $z_1 \approx 2(0{,}866 + 0{,}5i) = 1{,}732 + i$ et
$z_2 \approx 3(0{,}707 + 0{,}707i) = 2{,}121 + 2{,}121i$, dont le produit vaut
$\approx (1{,}732)(2{,}121) - (1)(2{,}121) + i[(1{,}732)(2{,}121) + (1)(2{,}121)] \approx 1{,}553 + 5{,}796i$ ✔.

Voilà tout l'intérêt de la forme trigonométrique : le produit y devient une simple addition d'angles.

Réponse. $|z_1 z_2| = 6$ et arg $= \frac{5\pi}{12}$ · $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{2}{3}$ et arg $= -\frac{\pi}{12}$ · $z_1 z_2 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

Rappel de cours. Produit : modules ×, arguments + · quotient : modules ÷, arguments −.

Erreur fréquente. Multiplier les arguments : $\frac{\pi}{6} \times \frac{\pi}{4}$ n'a aucun sens ici. Les arguments s'ajoutent, comme des angles de rotations successives.

Correction de l'exercice 12 – Équation du type z² = k

$z^2 + 25 = 0$ équivaut à $z^2 = -25$. Dans $\mathbb{R}$ il n'y aurait pas de solution ; dans $\mathbb{C}$, si.

On écrit $-25 = 25 \times (-1) = 25i^2 = (5i)^2$.

Donc $z^2 = (5i)^2$, ce qui donne $z = 5i$ ou $z = -5i$.

Contrôle : $(5i)^2 = 25i^2 = -25$ ✔ et $(-5i)^2 = 25i^2 = -25$ ✔.

Seconde équation : $4z^2 = -9$, donc $z^2 = -\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}i\right)^2$.

Les solutions sont $z = \frac{3}{2}i$ et $z = -\frac{3}{2}i$, soit $1{,}5i$ et $-1{,}5i$.

Remarque : ces solutions sont deux complexes CONJUGUÉS, tous deux imaginaires purs. C'est toujours le cas pour une équation $z^2 = -k$ avec $k > 0$.

Réponse. $z = 5i$ ou $z = -5i$ · $z = 1{,}5i$ ou $z = -1{,}5i$.

Rappel de cours. $z^2 = -k$ avec $k > 0$ admet DEUX solutions imaginaires pures, $\pm i\sqrt{k}$.

Erreur fréquente. Écrire $\sqrt{-25} = -5$: la racine carrée d'un négatif n'est pas définie. On passe par $i^2 = -1$.

Correction de l'exercice 13 – Distance et interprétation géométrique

$AB = |z_B - z_A| = |4 + 2i| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$BC = |z_C - z_B| = |-2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$AC = |z_C - z_A| = |2 + 4i| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$AB = AC = 2\sqrt{5}$: le triangle est ISOCÈLE en A.

Est-il rectangle ? Le plus grand côté est $2\sqrt{5}$ (soit $\approx 4{,}47$) ; on teste
$BC^2 + AC^2 = 8 + 20 = 28$ contre $AB^2 = 20$. Les valeurs diffèrent.

On teste aussi l'angle en A : $AB^2 + AC^2 = 20 + 20 = 40$ contre $BC^2 = 8$. Différent également.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le triangle est donc isocèle en A, mais pas rectangle.

Contrôle de vraisemblance : avec une base $BC = 2{,}83$ et deux côtés de 4,47, le triangle est « pointu » en A — l'angle en A vaut environ 36,9° d'après Al-Kashi.

Réponse. $AB = AC = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ et $BC = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ · triangle isocèle en A, non rectangle.

Rappel de cours. $AB = |z_B - z_A|$: toute question de distance dans le plan complexe se ramène à un module de différence.

Erreur fréquente. Calculer $|z_B| - |z_A|$: cela donne une différence de distances à l'origine, pas la distance AB.

Correction de l'exercice 14 – Impédance complexe

$|Z| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1\,600} = \sqrt{2\,500} = 50\ \Omega$.

Interprétation : le module de l'impédance est le rapport entre l'amplitude de la tension et celle du courant. Ici, 50 ohms.

Pour l'argument φ : $\cos\varphi = \dfrac{30}{50} = 0{,}6$ et $\sin\varphi = \dfrac{40}{50} = 0{,}8$, tous deux positifs.

$\varphi = \arccos(0{,}6) \approx 53{,}13°$, soit environ 53° (soit 0,927 rad).

Interprétation : l'argument est le DÉPHASAGE de la tension par rapport au courant. Ici la tension est en avance de 53° : c'est le comportement d'un circuit inductif (bobine).

Amplitude de la tension : $U = |Z| \times I = 50 \times 2 = 100$ V.

Contrôle de cohérence : la réactance $X = 40\ \Omega$ est positive, ce qui correspond bien à un circuit inductif, en accord avec le déphasage positif ✔.

Réponse. $|Z| = 50\ \Omega$ (rapport tension/courant) · $\arg Z \approx 53°$ (déphasage tension/courant, circuit inductif) · $U = 100$ V.

Rappel de cours. Module de Z → rapport des amplitudes · argument de Z → déphasage. Le complexe porte les DEUX informations.

Erreur fréquente. Additionner $30 + 40 = 70\ \Omega$ pour l'impédance : résistance et réactance ne s'additionnent pas arithmétiquement, mais « en quadrature ».

Correction de l'exercice 15 – Conjugué et parties réelle et imaginaire

$Z = \dfrac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \dfrac{6 + 2i + 3i + i^2}{9 + 1}$.

Numérateur : $6 - 1 + 5i = 5 + 5i$. Dénominateur : 10.

Donc $Z = \dfrac{5 + 5i}{10} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i = 0{,}5 + 0{,}5i$.

Conjugué : $\overline{Z} = 0{,}5 - 0{,}5i$.

Somme : $Z + \overline{Z} = (0{,}5 + 0{,}5) + (0{,}5 - 0{,}5)i = 1$. C'est un réel, égal à $2\mathrm{Re}(Z)$ ✔.

Produit : $Z\overline{Z} = (0{,}5)^2 + (0{,}5)^2 = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$. C'est aussi un réel, égal à $|Z|^2$ ✔.

Contrôle : $|Z| = \sqrt{0{,}25 + 0{,}25} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$, et $|Z|^2 = 0{,}5$ ✔.

Ces deux résultats sont généraux : $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z\overline{z} = |z|^2$, toujours réels.

Réponse. $Z = 0{,}5 + 0{,}5i$ · $Z + \overline{Z} = 1 = 2\mathrm{Re}(Z)$ · $Z\overline{Z} = 0{,}5 = |Z|^2$.

Rappel de cours. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ · $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$ · $z\overline{z} = |z|^2$.

Erreur fréquente. Écrire $z\overline{z} = z^2$: ici $Z^2 = (0{,}5 + 0{,}5i)^2 = 0{,}5i$, qui n'est même pas réel.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Type bac : circuit RL série

$\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi \approx 314{,}16$ rad/s.

Réactance : $L\omega = 0{,}2 \times 314{,}16 \approx 62{,}83$, soit environ 63 Ω.

Forme algébrique : $Z \approx 100 + 63j$ (en ohms).

Module : $|Z| = \sqrt{100^2 + 62{,}83^2} = \sqrt{10\,000 + 3\,947{,}6} = \sqrt{13\,947{,}6} \approx 118{,}1$ Ω.

Déphasage : $\tan\varphi = \dfrac{62{,}83}{100} = 0{,}6283$, donc $\varphi = \arctan(0{,}6283) \approx 32{,}14°$, soit environ 32°.

L’argument est positif : la tension est en avance sur le courant, comportement inductif attendu pour une bobine ✔.

Amplitude du courant : $I = \dfrac{U}{|Z|} = \dfrac{325}{118{,}1} \approx 2{,}75$ A.

Contrôle de cohérence : si la bobine était absente ($Z = 100$ Ω), on aurait $I = 3{,}25$ A et aucun déphasage. La bobine réduit donc le courant de 15% tout en introduisant un déphasage de 32°.

Remarque pratique : à 50 Hz cette bobine « pèse » 63 Ω ; à 500 Hz elle pèserait 628 Ω. La réactance croît proportionnellement à la fréquence, ce qui fait de la bobine un filtre naturel des hautes fréquences.

Réponse. $\omega = 100\pi \approx 314$ rad/s et $L\omega \approx 63$ Ω · $Z \approx 100 + 63j$ et $|Z| \approx 118{,}1$ Ω · $\varphi \approx 32°$ · $I \approx 2{,}75$ A.

Rappel de cours. $Z = R + jL\omega$: le module donne l’opposition au courant, l’argument le déphasage. $\tan\varphi = \dfrac{X}{R}$.

Erreur fréquente. Oublier le facteur 2π et prendre $\omega = 50$: la réactance tomberait à 10 Ω et le déphasage à 6°, très loin de la réalité.

Correction de l’exercice 17 – Type bac : ensemble de points

On reconnaît $z - 2 + i = z - (2 - i) = z - z_A$.

La condition s’écrit donc $|z - z_A| = 3$.

Or $|z - z_A| = AM$: la condition dit que la distance de M à A vaut 3.

L’ensemble cherché est donc le CERCLE de centre $A(2\,;-1)$ et de rayon 3.

Test de $B(5\,;-1)$: $|z_B - z_A| = |(5 - i) - (2 - i)| = |3| = 3$ ✔ B appartient au cercle.

Test de $C(2\,;3)$: $|z_C - z_A| = |(2 + 3i) - (2 - i)| = |4i| = 4$.

$4 \neq 3$: C n’appartient PAS au cercle, il est à l’extérieur (à 4 unités du centre).

Contrôle graphique : B est à 3 unités à droite de A, donc sur le cercle ; C est à 4 unités au-dessus, donc dehors ✔.

À retenir : $|z - z_A| = r$ est l’équation d’un cercle, et $|z - z_A| \leq r$ celle du disque correspondant.

Réponse. Condition $|z - z_A| = 3$ avec $z_A = 2 - i$ · l’ensemble est le cercle de centre $A(2\,;-1)$ et de rayon 3 · B y appartient, C non (distance 4).

Rappel de cours. $|z - z_A| = AM$: un module de différence est une distance, donc $|z - z_A| = r$ décrit un cercle.

Erreur fréquente. Lire $|z - 2 + i| = 3$ comme un centre d’affixe $2 + i$: le $+i$ de l’écriture correspond à $-(-i)$, donc le centre est $2 - i$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 18 – Type bac : calcul complet avec conjugué

Numérateur : $(1+2i)(3-i) = 3 - i + 6i - 2i^2 = 3 + 2 + 5i = 5 + 5i$.

Donc $Z = \dfrac{5+5i}{2+i}$.

On multiplie par le conjugué du dénominateur : $Z = \dfrac{(5+5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{10 - 5i + 10i - 5i^2}{4+1}$.

Numérateur : $10 + 5 + 5i = 15 + 5i$. Dénominateur : 5.

$Z = \dfrac{15+5i}{5} = 3 + i$.

Première méthode pour le module : directement, $|Z| = |3+i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Seconde méthode, par les propriétés : $|Z| = \dfrac{|1+2i| \times |3-i|}{|2+i|} = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{10}$ ✔.

La seconde méthode est bien plus rapide quand seul le module est demandé : on n'a même pas besoin de la forme algébrique.

Contrôle final : $(3+i)(2+i) = 6 + 3i + 2i + i^2 = 5 + 5i$, qui est bien le numérateur initial ✔.

Réponse. Numérateur $= 5 + 5i$ · $Z = 3 + i$ · $|Z| = \sqrt{10} \approx 3{,}16$, retrouvé par $\dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}{\sqrt{5}}$.

Rappel de cours. $\left|\dfrac{zz'}{z''}\right| = \dfrac{|z||z'|}{|z''|}$: le module se calcule sans développer.

Erreur fréquente. Simplifier $\dfrac{5+5i}{2+i}$ « en divisant terme à terme » : la division de complexes passe obligatoirement par le conjugué.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : composition de deux signaux

$Z_1 = 40(0 + i \times 1) = 40i$: c'est une tension déphasée de 90°, donc purement « imaginaire ».

$Z_2 = 30(1 + 0i) = 30$: tension de phase nulle, prise comme référence.

Somme : $Z = 30 + 40i$.

Amplitude résultante : $|Z| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2\,500} = 50$ V.

Phase résultante : $\cos\varphi = \dfrac{30}{50} = 0{,}6$ et $\sin\varphi = \dfrac{40}{50} = 0{,}8$, donc $\varphi = \arccos(0{,}6) \approx 53{,}13°$, soit environ 53° (0,927 rad).

Résultat : la somme des deux tensions est une tension d'amplitude 50 V déphasée de 53° par rapport à la référence.

Point essentiel : les amplitudes ne s'additionnent PAS ($40 + 30 = 70$ V serait faux). Elles s'ajoutent vectoriellement, ici en quadrature, d'où le $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$.

Vérification par la trigonométrie : $30\cos(\omega t) + 40\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = 30\cos(\omega t) + 40\sin(\omega t)$, dont l'amplitude est bien $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ ✔ — c'est exactement le calcul que les complexes rendent immédiat.

C'est le principe de la représentation de Fresnel : additionner des signaux sinusoïdaux de même fréquence revient à additionner des complexes.

Réponse. $Z_1 = 40i$ et $Z_2 = 30$ · $Z = 30 + 40i$ · amplitude 50 V, phase ≈ 53°.

Rappel de cours. Somme de signaux de MÊME fréquence : on additionne les complexes, puis on relit module (amplitude) et argument (phase).

Erreur fréquente. Additionner les amplitudes : deux tensions de 30 V et 40 V en

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

quadrature donnent 50 V, pas 70 V.

Correction de l’exercice 20 – Type bac : carré et forme trigonométrique

$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Forme trigonométrique : $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Pour le carré, on applique la règle du produit avec $z \times z$: le module est élevé au carré, l’argument est doublé.

$|z^2| = 2^2 = 4$ et $\arg(z^2) = 2 \times \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Forme trigonométrique : $z^2 = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Or $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $z^2 = 4\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.

Vérification directe : $z^2 = (1 + i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ ✔.

Les deux méthodes concordent. Sur une puissance élevée (z^8, par exemple), la forme trigonométrique serait incomparablement plus rapide : il suffirait de multiplier l’argument par 8.

Réponse. $|z| = 2$ et $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$ · $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ · $z^2 = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.

Rappel de cours. $|z^2| = |z|^2$ et $\arg(z^2) = 2\arg(z)$: élever au carré double l’angle et met le module au carré.

Erreur fréquente. Écrire $(i\sqrt{3})^2 = 3$: le carré de i valant -1, ce terme vaut -3, et la partie réelle change de signe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).