Nombres complexes — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Les nombres complexes servent à écrire d'un seul coup deux informations : une AMPLITUDE et un DÉPHASAGE. C'est exactement ce dont on a besoin en régime sinusoïdal, où l'impédance $Z = R + jX$ résume tout le comportement d'un circuit — son module donne le rapport entre tension et courant, son argument donne le déphasage entre eux. Le chapitre part donc du calcul algébrique ($i^2 = -1$, conjugué, quotient) pour arriver au module et à l'argument, c'est-à-dire à la forme trigonométrique. Ces 20 exercices corrigés suivent ce chemin, du calcul direct au problème type bac sur un circuit RL ou une composition de signaux. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/nombres-complexes

Exercice 1 – Somme et produit de complexes

On considère $z_1 = 3 + 5i$ et $z_2 = 4 - 2i$.

1. Calcule $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

2. Calcule $z_1 \times z_2$.

Exercice 2 – Puissances de i

On rappelle que $i^2 = -1$.

1. Calcule i^3, i^4 et i^5.

2. Calcule i^{2026}.

Exercice 3 – Conjugué, partie réelle et imaginaire

On considère $z = -2 + 7i$, $z' = 5$ et $z'' = -3i$.

1. Donne la partie réelle et la partie imaginaire de chacun.

2. Donne leur conjugué.

Exercice 4 – Calculer un module

On considère $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -5 + 12i$ et $z_3 = -6$.

1. Calcule le module de chacun de ces complexes.

Exercice 5 – Affixe d'un point et d'un vecteur

Dans le plan complexe, A a pour affixe $z_A = 2 + 3i$ et B a pour affixe $z_B = 6 - i$.

1. Donne les coordonnées des points A et B.

2. Détermine l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis la distance AB.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Quotient de deux complexes

On veut écrire $Z = \dfrac{5+10i}{1+2i}$ sous forme algébrique.

1. Effectue le calcul en multipliant par le conjugué du dénominateur.

2. Même travail pour $Z' = \dfrac{3}{2-i}$.

Exercice 7 – Résoudre une équation du premier degré

On cherche le complexe z vérifiant $(2+i)z = 5-5i$.

1. Résous cette équation.

2. Résous ensuite $3z + 2i = z - 4$.

Exercice 8 – Module d'un produit et d'un quotient

On donne $z_1 = 3+4i$ (de module 5) et $z_2 = 1-i$.

1. Calcule $|z_2|$.

2. Calcule $|z_1 z_2|$ et $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ sans effectuer les opérations.

3. Vérifie le premier résultat par le calcul direct.

Exercice 9 – Forme trigonométrique

On considère $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2i$ et $z_3 = -3$.

1. Écris chacun sous forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Exercice 10 – De la forme trigonométrique à l'algébrique

On donne $z_1 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $z_2 = 6\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

1. Écris z_1 et z_2 sous forme algébrique.

Exercice 11 – Argument d'un produit

On donne $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1. Donne le module et un argument de $z_1 z_2$.

2. Donne le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

3. Écris $z_1 z_2$ sous forme trigonométrique.

Exercice 12 – Équation du type z² = k

On cherche les solutions complexes de $z^2 + 25 = 0$, puis de $4z^2 + 9 = 0$.

1. Résous ces deux équations dans $\mathbb{C}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Distance et interprétation géométrique

Dans le plan complexe, A, B et C ont pour affixes $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 5 + 4i$ et $z_C = 3 + 6i$.

1. Calcule les longueurs AB, BC et AC.

2. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 14 – Impédance complexe

En électricité, l'impédance d'un dipôle s'écrit $Z = R + jX$, où R est la résistance et X la réactance, en ohms (les électriciens notent j ce que les mathématiciens notent i). On considère $Z = 30 + 40j$.

1. Calcule le module $|Z|$ et interprète-le.

2. Calcule l'argument de Z, arrondi au degré, et interprète-le.

3. Si le courant a une amplitude de 2 A, quelle est l'amplitude de la tension ?

Exercice 15 – Conjugué et parties réelle et imaginaire

On considère $Z = \dfrac{2 + i}{3 - i}$.

1. Écris Z sous forme algébrique.

2. Calcule $Z + \overline{Z}$ et $Z \times \overline{Z}$, et vérifie que ce sont des réels.

Exercice 16 – Type bac : circuit RL série

Un circuit RL série comporte une résistance $R = 100\ \Omega$ et une bobine d'inductance $L = 0{,}2$ H. Il est alimenté à la fréquence $f = 50$ Hz. L'impédance complexe vaut $Z = R + jL\omega$, avec $\omega = 2\pi f$.

1. Calcule ω puis la réactance $L\omega$, arrondie à l'unité.

2. Donne Z sous forme algébrique, puis calcule $|Z|$.

3. Calcule le déphasage $\varphi = \arg(Z)$, arrondi au degré.

4. Pour une tension d'amplitude 325 V, calcule l'amplitude du courant.

Exercice 17 – Type bac : ensemble de points

Dans le plan complexe, A a pour affixe $z_A = 2 - i$. On cherche l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 2 + i| = 3$.

1. Écris la condition sous la forme $|z - z_A| = 3$.

2. Décris l'ensemble des points M.

3. Le point B d'affixe $5 - i$ appartient-il à cet ensemble ? Et C d'affixe $2 + 3i$?

Exercice 18 – Type bac : calcul complet avec conjugué

On considère $Z = \dfrac{(1 + 2i)(3 - i)}{2 + i}$.

1. Calcule le numérateur sous forme algébrique.

2. Écris Z sous forme algébrique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Calcule $|Z|$ de deux façons.

Exercice 19 – Type bac : composition de deux signaux

Deux tensions de même pulsation sont représentées par les complexes $Z_1 = 40\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ et $Z_2 = 30(\cos 0 + i\sin 0)$ (amplitudes en volts, arguments donnant les phases).

1. Donne Z_1 et Z_2 sous forme algébrique.

2. Calcule $Z = Z_1 + Z_2$ sous forme algébrique.

3. Donne l'amplitude et la phase de la tension résultante.

Exercice 20 – Type bac : carré et forme trigonométrique

On considère $z = 1 + i\sqrt{3}$.

1. Calcule $|z|$ et détermine un argument de z.

2. Écris z sous forme trigonométrique.

3. En déduire le module et un argument de z^2, puis z^2 sous forme algébrique.

4. Vérifie par le calcul direct de z^2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).