Primitives — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Chercher une primitive, c'est remonter le temps de la dérivation : on connaît la VITESSE et l'on veut la position, on connaît l'INTENSITÉ et l'on veut la charge, on connaît le DÉBIT et l'on veut le volume. La réponse n'est jamais unique — deux primitives diffèrent d'une constante — et c'est la condition initiale (position de départ, charge initiale) qui fixe cette constante. Quand la dérivée dépend de la grandeur elle-même, comme dans un circuit RC, il n'y a plus de primitive à écrire : on approche la solution pas à pas par la MÉTHODE D'EULER. Ces 20 exercices corrigés couvrent les primitives des polynômes et des signaux sinusoïdaux, les conditions initiales et Euler, du calcul direct au problème type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/primitives

Exercice 1 – Vérifier qu'une fonction est une primitive

On considère $f(x) = 6x^2 - 4x + 5$ et $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 7$.

1. Vérifie que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. $G(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 100$ est-elle aussi une primitive de f ?

Exercice 2 – Primitives d'un polynôme

Détermine une primitive de $f(x) = 4x^3 + 6x - 2$, puis de $g(x) = 5$ et de $h(x) = x^2 - x$.

1. Donne une primitive de chacune de ces trois fonctions.

Exercice 3 – Primitives de cosinus et sinus

Détermine une primitive de $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ et $h(x) = 3\cos x - 2\sin x$.

1. Donne une primitive de chacune de ces fonctions.

Exercice 4 – Toutes les primitives

Soit $f(x) = 2x + 3$.

1. Donne l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2. Combien de primitives f admet-elle ?

Exercice 5 – Primitive avec une condition

Soit $f(x) = 3x^2 - 4x$. On cherche la primitive F de f telle que $F(2) = 5$.

1. Donne la forme générale des primitives de f.

2. Détermine celle qui vérifie la condition.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Primitives d'un signal sinusoïdal

Détermine une primitive de $f(t) = \cos(4t)$, puis de $g(t) = 5\sin(2t)$ et de $h(t) = 3\cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1. Donne une primitive de chacune.

Exercice 7 – Primitive d'une puissance composée

Détermine une primitive de $f(x) = (2x + 1)^2$ et de $g(x) = (3 - x)^3$.

1. Donne une primitive de chacune, en développant si nécessaire.

Exercice 8 – De la vitesse à la position

Un mobile a pour vitesse $v(t) = 6t + 2$ mètres par seconde. À l'instant $t = 0$, il se trouve à la position $x = 5$ m.

1. Détermine la position $x(t)$.

2. Où se trouve le mobile à $t = 4$ s ?

Exercice 9 – De l'intensité à la charge

Un condensateur initialement déchargé est traversé par un courant constant $i = 0{,}003$ A. On rappelle que $i(t) = q'(t)$, où q est la charge en coulombs.

1. Détermine $q(t)$.

2. Au bout de combien de temps la charge atteint-elle 0,012 C ?

3. Même question si le courant vaut $i(t) = 0{,}003 + 0{,}0004t$.

Exercice 10 – Linéarité des primitives

Détermine une primitive de $f(t) = 2t^2 - 3\cos(5t) + 4$.

1. Donne une primitive F de f.

2. Détermine celle qui vérifie $F(0) = 1$.

Exercice 11 – Mouvement à accélération constante

Un chariot part du repos à la position $x = 0$ et subit une accélération constante $a = 2{,}4$ m/s².

1. Détermine la vitesse $v(t)$.

2. Détermine la position $x(t)$.

3. Quelle distance a-t-il parcourue au bout de 5 s, et quelle est alors sa vitesse ?

Exercice 12 – Du signal alternatif à sa primitive

Un condensateur initialement déchargé reçoit un courant $i(t) = 0{,}5\cos(100\pi t)$ ampères.

1. Détermine la charge $q(t)$.

2. Donne l'amplitude de la charge.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Compare l'amplitude de q à celle de i et commente.

Exercice 13 – Méthode d'Euler : premiers pas

On considère la fonction y vérifiant $y'(t) = 2t + 1$ et $y(0) = 3$. On applique la méthode d'Euler avec un pas $h = 0{,}5$.

1. Rappelle la relation d'Euler.

2. Calcule les valeurs approchées de y en $t = 0{,}5$, 1 et 1,5.

3. Compare à la solution exacte.

Exercice 14 – Euler pour un circuit RC

La tension aux bornes d'un condensateur en charge vérifie $u'(t) = \dfrac{E - u(t)}{RC}$, avec $E = 12$ V et $RC = 0{,}02$ s. Initialement $u(0) = 0$. On prend un pas $h = 0{,}005$ s.

1. Calcule $u'(0)$.

2. Calcule les valeurs approchées de u aux instants 0,005 ; 0,01 ; 0,015 et 0,02 s.

3. Que vaut la tension finale prévue par le modèle ?

Exercice 15 – De l'accélération à la vitesse d'un oscillateur

Un point mobile subit l'accélération $a(t) = -20\cos(20t)$ m/s². À l'instant $t = 0$, sa vitesse est nulle et sa position vaut 0,05 m.

1. Détermine la vitesse $v(t)$.

2. Détermine la position $x(t)$.

3. Vérifie que $a(t) = -400\,x(t)$.

Exercice 16 – Type bac : décollage d'un chariot automatisé

Un chariot démarre à l'arrêt (position 0) avec une accélération $a(t) = 3 - 0{,}6t$ m/s², pour $0 \leq t \leq 5$ s.

1. Détermine la vitesse $v(t)$.

2. À quel instant l'accélération devient-elle nulle, et quelle est alors la vitesse ?

3. Détermine la position $x(t)$ et la distance parcourue en 5 s.

4. La vitesse est-elle maximale à $t = 5$ s ?

Exercice 17 – Type bac : Euler et influence du pas

On étudie $y' = -2y$ avec $y(0) = 10$. On compare deux applications de la méthode d'Euler, avec $h = 0{,}25$ puis $h = 0{,}125$, pour estimer $y(0{,}5)$.

1. Applique Euler avec $h = 0{,}25$ (deux pas).

2. Applique Euler avec $h = 0{,}125$ (quatre pas).

3. La valeur exacte est $y(0{,}5) \approx 3{,}679$. Compare les deux estimations.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : du débit au volume

Une cuve initialement vide est remplie avec un débit $d(t) = 40 + 6t$ litres par minute, t en minutes, pendant 10 minutes.

1. Détermine le volume $V(t)$ contenu dans la cuve.

2. Calcule le volume au bout de 10 minutes.

3. Au bout de combien de temps la cuve contient-elle 300 L ?

4. Quel débit constant aurait donné le même volume final ?

Exercice 19 – Type bac : signal en dents de scie

Un courant vaut $i(t) = 0{,}02$ A pour $0 \leq t \leq 0{,}01$ s, puis $i(t) = -0{,}02$ A pour $0{,}01 \leq t \leq 0{,}02$ s. Le condensateur est déchargé à $t = 0$.

1. Détermine $q(t)$ sur $[0\,;0{,}01]$ et calcule $q(0{,}01)$.

2. Détermine $q(t)$ sur $[0{,}01\,;0{,}02]$.

3. Calcule $q(0{,}02)$ et commente.

4. Quelle est la charge maximale atteinte ?

Exercice 20 – Type bac : Euler programmé

On modélise le refroidissement d'une pièce par $T'(t) = -0{,}05(T(t) - 20)$, avec $T(0) = 200$ °C (températures en °C, temps en minutes).

1. Calcule $T'(0)$ et interprète.

2. Applique la méthode d'Euler avec $h = 2$ minutes pour estimer $T(2)$, $T(4)$ et $T(6)$.

3. Écris un programme Python calculant T après n pas.

4. Vers quelle température la pièce tend-elle ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Vérifier qu'une fonction est une primitive

F est une primitive de f si $F'(x) = f(x)$ pour tout x. On dérive donc F.

$F'(x) = 6x^2 - 4x + 5 + 0 = 6x^2 - 4x + 5$.

On retrouve exactement $f(x)$: F est bien une primitive de f ✔.

Pour G : $G'(x) = 6x^2 - 4x + 5$ également, car la dérivée de la constante 100 est nulle.

Donc G est AUSSI une primitive de f.

Conclusion importante : une fonction admet une INFINITÉ de primitives, qui diffèrent toutes d'une constante. Ici $G(x) = F(x) + 107$.

Réponse. $F'(x) = 6x^2 - 4x + 5 = f(x)$ ✔ · G est aussi une primitive (elle diffère de F d'une constante).

Rappel de cours. F primitive de $f \Leftrightarrow F' = f$. Pour vérifier, on DÉRIVE la candidate.

Erreur fréquente. Chercher à « intégrer » pour vérifier. La vérification se fait toujours dans le sens facile : on dérive.

Correction de l'exercice 2 – Primitives d'un polynôme

Règle de base : une primitive de x^n est $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ — on AUGMENTE l'exposant de 1 et l'on divise par le nouvel exposant.

Pour f : une primitive de $4x^3$ est $4 \times \dfrac{x^4}{4} = x^4$; de $6x$, c'est $6 \times \dfrac{x^2}{2} = 3x^2$; de -2, c'est $-2x$.

Donc $F(x) = x^4 + 3x^2 - 2x$.

Contrôle : $F'(x) = 4x^3 + 6x - 2$ ✔.

Pour $g(x) = 5$: $G(x) = 5x$ (dérivée 5 ✔).

Pour $h(x) = x^2 - x$: $H(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}$.

Contrôle : $H'(x) = \dfrac{3x^2}{3} - \dfrac{2x}{2} = x^2 - x$ ✔.

Réponse. $F(x) = x^4 + 3x^2 - 2x$ · $G(x) = 5x$ · $H(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}$ (à une constante près).

Rappel de cours. Primitive de x^n : $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. C'est l'opération inverse de la dérivation, qui abaissait l'exposant.

Erreur fréquente. Diviser par l'ancien exposant : une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, pas $\frac{x^3}{2}$. Le contrôle par dérivation évite cette erreur.

Correction de l'exercice 3 – Primitives de cosinus et sinus

On raisonne à partir des dérivées : $(\sin x)' = \cos x$, donc une primitive de $\cos x$ est $\sin x$.

$(\cos x)' = -\sin x$, donc une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$ (le signe moins compense).

Vérification : $(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$ ✔.

Pour h, on applique la linéarité : $H(x) = 3\sin x - 2 \times (-\cos x) = 3\sin x + 2\cos x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $H'(x) = 3\cos x + 2 \times (-\sin x) = 3\cos x - 2\sin x$ ✔.

Le signe moins « change de camp » par rapport à la dérivation : il est sur le SINUS quand on dérive, sur le COSINUS quand on primitive.

Réponse. Primitive de $\cos x$: $\sin x$ · de $\sin x$: $-\cos x$ · de h : $3\sin x + 2\cos x$.

Rappel de cours. cos → sin · sin → − cos. On vérifie toujours en dérivant le résultat.

Erreur fréquente. Écrire que la primitive de $\sin x$ est $\cos x$: en dérivant on obtiendrait $-\sin x$, donc le signe opposé.

Correction de l'exercice 4 – Toutes les primitives

Une primitive évidente : $F_0(x) = x^2 + 3x$ (car $F_0'(x) = 2x + 3$ ✔).

Toutes les autres s'en déduisent en ajoutant une constante : les primitives de f sont les fonctions $F(x) = x^2 + 3x + C$, où C est un réel quelconque.

f admet donc une INFINITÉ de primitives, une pour chaque valeur de C.

Pourquoi seulement une constante d'écart ? Parce que si F et G sont deux primitives de f, alors $(F - G)' = f - f = 0$, et une fonction de dérivée nulle est constante.

Graphiquement, les courbes des primitives se déduisent l'une de l'autre par TRANSLATION verticale : elles ont la même pente en chaque abscisse.

Réponse. $F(x) = x^2 + 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$ · il y en a une infinité, obtenues par translation verticale.

Rappel de cours. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une CONSTANTE. Il faut donc toujours écrire le « $+C$ ».

Erreur fréquente. Oublier le « $+C$ » quand la question demande TOUTES les primitives : la réponse serait incomplète.

Correction de l'exercice 5 – Primitive avec une condition

Primitives : $F(x) = \dfrac{3x^3}{3} - \dfrac{4x^2}{2} + C = x^3 - 2x^2 + C$.

On utilise la condition $F(2) = 5$ pour déterminer C.

$F(2) = 8 - 8 + C = C$, donc $C = 5$.

La primitive cherchée est $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5$.

Contrôle double : $F'(x) = 3x^2 - 4x = f(x)$ ✔ et $F(2) = 8 - 8 + 5 = 5$ ✔.

Une condition, une constante : c'est ce qui rend la primitive UNIQUE. En physique, cette condition est la valeur initiale de la grandeur.

Réponse. $F(x) = x^3 - 2x^2 + C$ · la condition donne $C = 5$, donc $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5$.

Rappel de cours. Une condition du type $F(a) = b$ détermine la constante, donc UNE seule primitive.

Erreur fréquente. Déterminer C avant d'avoir écrit la primitive générale : il faut d'abord primitiver, puis imposer la condition.

Correction de l'exercice 6 – Primitives d'un signal sinusoïdal

Principe : dériver $\sin(\omega t)$ donne $\omega\cos(\omega t)$. Pour primitiver $\cos(\omega t)$, il faut donc DIVISER par ω.

$f(t) = \cos(4t)$: une primitive est $F(t) = \dfrac{1}{4}\sin(4t)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $F'(t) = \frac{1}{4} \times 4\cos(4t) = \cos(4t)$ ✔.

$g(t) = 5\sin(2t)$: une primitive du sinus est $-\cos$, et l'on divise par 2. Donc $G(t) = -\frac{5}{2}\cos(2t)$.

Contrôle : $G'(t) = -\frac{5}{2} \times (-2\sin(2t)) = 5\sin(2t)$ ✔.

$h(t) = 3\cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$: la phase ne change rien à la méthode, on divise par 10.

$H(t) = \frac{3}{10}\sin\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Contrôle : $H'(t) = \frac{3}{10} \times 10\cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) = h(t)$ ✔.

Réponse. $F(t) = \frac{1}{4}\sin(4t) \cdot G(t) = -\frac{5}{2}\cos(2t) \cdot H(t) = \frac{3}{10}\sin\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Rappel de cours. Primitive de $A\cos(\omega t + \varphi)$: $\frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$ · de $A\sin(\omega t + \varphi)$: $-\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$.

Erreur fréquente. Multiplier par ω au lieu de diviser : la dérivation multiplie par ω, donc la primitivation divise.

Correction de l'exercice 7 – Primitive d'une puissance composée

Première méthode pour f, le développement : $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$.

Primitive : $F(x) = \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x$.

Seconde méthode, par analogie : la dérivée de $(2x+1)^3$ est $2 \times 3(2x+1)^2 = 6(2x+1)^2$. Donc une primitive de $(2x+1)^2$ est $\frac{(2x+1)^3}{6}$.

Les deux résultats diffèrent d'une constante : $\frac{(2x+1)^3}{6} = \frac{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}{6} = \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x + \frac{1}{6}$ ✔ — c'est bien $F(x) + \frac{1}{6}$.

Pour $g(x) = (3-x)^3$: la dérivée de $(3-x)^4$ est $-4(3-x)^3$. Donc une primitive de $(3-x)^3$ est $-\frac{(3-x)^4}{4}$.

Contrôle : $\left(-\frac{(3-x)^4}{4}\right)' = -\frac{-4(3-x)^3}{4} = (3-x)^3$ ✔.

À retenir : pour $(ax+b)^n$, une primitive est $\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$ — on divise par a ET par le nouvel exposant.

Réponse. $F(x) = \frac{(2x+1)^3}{6}$ (ou $\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x$) · $G(x) = -\frac{(3-x)^4}{4}$.

Rappel de cours. Primitive de $(ax+b)^n$: $\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$. Toujours vérifier en dérivant.

Erreur fréquente. Oublier de diviser par a : pour $(3-x)^3$, $a = -1$ fait apparaître le signe moins, qu'on perd si l'on n'y pense pas.

Correction de l'exercice 8 – De la vitesse à la position

La vitesse est la dérivée de la position : $x'(t) = v(t)$. La position est donc une PRIMITIVE de la vitesse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Primitives de v : $x(t) = \frac{6t^2}{2} + 2t + C = 3t^2 + 2t + C$.

Condition initiale : $x(0) = 5$, or $x(0) = C$. Donc $C = 5$.

$x(t) = 3t^2 + 2t + 5$.

À $t = 4$ s : $x(4) = 3 \times 16 + 8 + 5 = 48 + 13 = 61$ m.

Contrôle : $x'(t) = 6t + 2 = v(t)$ ✔ et $x(0) = 5$ ✔.

Interprétation : le mobile a parcouru $61 - 5 = 56$ m en 4 s, soit une vitesse moyenne de 14 m/s — cohérent avec une vitesse passant de 2 m/s à 26 m/s ✔.

Réponse. $x(t) = 3t^2 + 2t + 5$ · $x(4) = 61$ m.

Rappel de cours. Position → vitesse par dérivation, vitesse → position par primitivation. La condition initiale fixe la constante.

Erreur fréquente. Oublier la constante : on trouverait $x(4) = 56$ m, en ignorant les 5 m de position de départ.

Correction de l’exercice 9 – De l’intensité à la charge

q est une primitive de i. Pour un courant constant : $q(t) = 0{,}003t + C$.

Condensateur initialement déchargé : $q(0) = 0$, donc $C = 0$ et $q(t) = 0{,}003t$.

On résout $0{,}003t = 0{,}012$, soit $t = \frac{0{,}012}{0{,}003} = 4$ s.

Avec le courant variable : $q(t) = 0{,}003t + \frac{0{,}0004t^2}{2} = 0{,}003t + 0{,}0002t^2$ (toujours avec $C = 0$).

On résout $0{,}0002t^2 + 0{,}003t = 0{,}012$. En multipliant par 5 000 : $t^2 + 15t = 60$, soit $t^2 + 15t - 60 = 0$.

Complétons le carré : $t^2 + 15t = (t + 7{,}5)^2 - 56{,}25$, donc l’équation devient $(t + 7{,}5)^2 = 116{,}25$.

$t + 7{,}5 = \sqrt{116{,}25} \approx 10{,}78$ (la solution négative est rejetée), donc $t \approx 3{,}28$ s.

Cohérence : le courant augmentant avec le temps, la charge s’accumule plus vite, et le seuil est atteint plus tôt (3,28 s contre 4 s) ✔.

Réponse. $q(t) = 0{,}003t$ · seuil atteint à $t = 4$ s · avec le courant variable, $q(t) = 0{,}003t + 0{,}0002t^2$ et le seuil est atteint à $t \approx 3{,}28$ s.

Rappel de cours. $i = \frac{dq}{dt}$: la charge est la primitive de l’intensité. Un condensateur déchargé impose $q(0) = 0$.

Erreur fréquente. Diviser la charge par l’intensité quand celle-ci est VARIABLE : ce raccourci ne vaut que pour un courant constant.

Correction de l’exercice 10 – Linéarité des primitives

On primitive terme par terme (linéarité).

Pour $2t^2$: $\frac{2t^3}{3}$.

Pour $-3\cos(5t)$: la primitive de $\cos(5t)$ est $\frac{1}{5}\sin(5t)$, donc celle de $-3\cos(5t)$ est $-\frac{3}{5}\sin(5t)$.

Pour 4 : $4t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc $F(t) = \frac{2t^3}{3} - \frac{3}{5}\sin(5t) + 4t + C$.

Condition : $F(0) = 0 - \frac{3}{5}\sin 0 + 0 + C = C$, donc $C = 1$.

$F(t) = \frac{2t^3}{3} - \frac{3}{5}\sin(5t) + 4t + 1$.

Contrôle par dérivation : $F'(t) = 2t^2 - \frac{3}{5} \times 5\cos(5t) + 4 = 2t^2 - 3\cos(5t) + 4$ ✔.

Réponse. $F(t) = \frac{2t^3}{3} - \frac{3}{5}\sin(5t) + 4t + C$, et $C = 1$ avec la condition donnée.

Rappel de cours. Linéarité : la primitive d'une somme est la somme des primitives, et les coefficients restent devant.

Erreur fréquente. Ne pas propager le signe moins : la primitive de $-3\cos(5t)$ est $-\frac{3}{5}\sin(5t)$, pas $+\frac{3}{5}\sin(5t)$.

Correction de l'exercice 11 – Mouvement à accélération constante

La vitesse est une primitive de l'accélération : $v(t) = 2{,}4t + C_1$.

Départ du repos : $v(0) = 0$, donc $C_1 = 0$ et $v(t) = 2{,}4t$.

La position est une primitive de la vitesse : $x(t) = \frac{2{,}4t^2}{2} + C_2 = 1{,}2t^2 + C_2$.

Position initiale nulle : $x(0) = 0$, donc $C_2 = 0$ et $x(t) = 1{,}2t^2$.

À $t = 5$ s : $x(5) = 1{,}2 \times 25 = 30$ m et $v(5) = 2{,}4 \times 5 = 12$ m/s.

Contrôle par la vitesse moyenne : la vitesse croît linéairement de 0 à 12 m/s, donc sa moyenne vaut 6 m/s, et $6 \times 5 = 30$ m ✔.

On retrouve ainsi les formules du mouvement uniformément accéléré, $v = at$ et $x = \frac{1}{2}at^2$: elles ne sont rien d'autre que deux primitivations successives.

Réponse. $v(t) = 2{,}4t$ · $x(t) = 1{,}2t^2$ · à $t = 5$ s : 30 m parcourus à 12 m/s.

Rappel de cours. Deux primitivations successives : accélération → vitesse → position, avec DEUX constantes à déterminer.

Erreur fréquente. Oublier le facteur $\frac{1}{2}$ en primitivant : $x(t) = 2{,}4t^2$ donnerait le double de la distance réelle.

Correction de l'exercice 12 – Du signal alternatif à sa primitive

q est une primitive de i : $q(t) = \frac{0{,}5}{100\pi}\sin(100\pi t) + C$.

$\frac{0{,}5}{100\pi} = \frac{1}{200\pi} \approx 1{,}59 \times 10^{-3}$.

Condition initiale : $q(0) = 0$, et comme $\sin 0 = 0$, on obtient $C = 0$.

Donc $q(t) = \frac{1}{200\pi}\sin(100\pi t) \approx 1{,}59 \times 10^{-3}\sin(100\pi t)$ coulombs.

Amplitude de la charge : environ 1,59 mC.

Comparaison : le courant a une amplitude de 0,5 A, la charge de 1,59 mC seulement. La primitivation a DIVISÉ l'amplitude par $\omega = 100\pi \approx 314$.

Interprétation : plus la fréquence est élevée, moins le condensateur a le temps de se charger entre deux alternances. C'est exactement pourquoi son impédance $\frac{1}{C\omega}$ décroît avec la fréquence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $q'(t) = \frac{1}{200\pi} \times 100\pi \cos(100\pi t) = 0{,}5\cos(100\pi t) = i(t)$ ✔.

Réponse. $q(t) = \frac{1}{200\pi}\sin(100\pi t) \approx 1{,}59 \times 10^{-3}\sin(100\pi t)$ C · amplitude ≈ 1,59 mC · l'amplitude est divisée par $\omega \approx 314$.

Rappel de cours. Primitiver un signal DIVISE son amplitude par ω ; dériver la MULTIPLIE par ω.

Erreur fréquente. Conserver l'amplitude 0,5 pour la charge : l'oubli du $\frac{1}{\omega}$ fausse le résultat d'un facteur 314.

Correction de l'exercice 13 – Méthode d'Euler : premiers pas

Relation d'Euler : $y_{n+1} = y_n + h \times y'(t_n)$. On avance par petits segments de tangente.

Départ : $t_0 = 0$, $y_0 = 3$. Pente : $y'(0) = 1$.

$y_1 = 3 + 0{,}5 \times 1 = 3{,}5$ (approximation de $y(0{,}5)$).

En $t_1 = 0{,}5$: pente $y'(0{,}5) = 2 \times 0{,}5 + 1 = 2$, donc $y_2 = 3{,}5 + 0{,}5 \times 2 = 4{,}5$ (approximation de $y(1)$).

En $t_2 = 1$: pente $y'(1) = 3$, donc $y_3 = 4{,}5 + 0{,}5 \times 3 = 6$ (approximation de $y(1{,}5)$).

Solution exacte : y est la primitive de $2t + 1$ valant 3 en 0, soit $y(t) = t^2 + t + 3$.

Valeurs exactes : $y(0{,}5) = 0{,}25 + 0{,}5 + 3 = 3{,}75$; $y(1) = 5$; $y(1{,}5) = 2{,}25 + 1{,}5 + 3 = 6{,}75$.

Comparaison : Euler donne 3,5 ; 4,5 ; 6 contre 3,75 ; 5 ; 6,75. L'écart croît (0,25 puis 0,5 puis 0,75) : les erreurs s'ACCUMULENT.

Euler sous-estime ici systématiquement, parce que la pente utilisée est celle du DÉBUT de chaque intervalle, alors qu'elle augmente sur l'intervalle. Un pas plus petit réduirait l'écart.

Réponse. $y_{n+1} = y_n + h\,y'(t_n)$ · Euler donne 3,5 ; 4,5 ; 6 · solution exacte $y(t) = t^2 + t + 3$, soit 3,75 ; 5 ; 6,75 : l'erreur s'accumule.

Rappel de cours. Euler remplace la courbe par une succession de segments de TANGENTE : chaque pas introduit une petite erreur, qui se cumule.

Erreur fréquente. Utiliser la pente au point d'ARRIVÉE : la méthode d'Euler utilise la pente au point de départ de chaque pas.

Correction de l'exercice 14 – Euler pour un circuit RC

$u'(0) = \frac{12 - 0}{0{,}02} = 600$ V/s : la charge démarre très vite.

Premier pas : $u_1 = u_0 + h\,u'(0) = 0 + 0{,}005 \times 600 = 3$ V (à $t = 0{,}005$ s).

Pente en $u_1 = 3$: $u' = \frac{12 - 3}{0{,}02} = 450$ V/s, donc $u_2 = 3 + 0{,}005 \times 450 = 5{,}25$ V (à $t = 0{,}01$ s).

Pente en $u_2 = 5{,}25$: $u' = \frac{6{,}75}{0{,}02} = 337{,}5$ V/s, donc $u_3 = 5{,}25 + 1{,}687\,5 = 6{,}937\,5$ V (à $t = 0{,}015$ s).

Pente en u_3 : $u' = \frac{12 - 6{,}9375}{0{,}02} = 253{,}125$ V/s, donc $u_4 = 6{,}9375 + 1{,}265\,6 \approx 8{,}203$ V (à $t = 0{,}02$ s).

On observe que la pente DIMINUE à chaque pas : plus le condensateur se charge, plus la charge ralentit.

Tension finale : la charge s'arrête quand $u' = 0$, c'est-à-dire quand $u = E = 12$ V. Le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

condensateur tend vers 12 V sans jamais l'atteindre exactement.

Ordre de grandeur : après 0,02 s (soit une constante de temps RC), le modèle exact donnerait 7,59 V. Euler annonce 8,20 V, soit une surestimation de 8% — le pas est un peu grand.

Réponse. $u'(0) = 600$ V/s · Euler donne 3 ; 5,25 ; 6,94 et 8,20 V · la tension tend vers $E = 12$ V.

Rappel de cours. Quand y' dépend de y, il n'y a pas de primitive à écrire : Euler recalcule la PENTE à chaque pas, avec la valeur courante.

Erreur fréquente. Garder la pente initiale de 600 V/s pour tous les pas : on obtiendrait 12 V dès 0,02 s, puis des tensions supérieures à E, ce qui est impossible.

Correction de l'exercice 15 – De l'accélération à la vitesse d'un oscillateur

v est une primitive de a. Une primitive de $\cos(20t)$ est $\frac{1}{20}\sin(20t)$.

Donc $v(t) = -20 \times \frac{1}{20}\sin(20t) + C_1 = -\sin(20t) + C_1$.

Condition initiale : $v(0) = 0$. Or $v(0) = -\sin 0 + C_1 = C_1$, donc $C_1 = 0$.

$v(t) = -\sin(20t)$ m/s.

x est une primitive de v. Une primitive de $\sin(20t)$ est $-\frac{1}{20}\cos(20t)$.

Donc $x(t) = -\left(-\frac{1}{20}\cos(20t)\right) + C_2 = 0{,}05\cos(20t) + C_2$.

Condition initiale : $x(0) = 0{,}05$. Or $x(0) = 0{,}05\cos 0 + C_2 = 0{,}05 + C_2$, donc $C_2 = 0$.

$x(t) = 0{,}05\cos(20t)$ m.

Vérification : $-400\,x(t) = -400 \times 0{,}05\cos(20t) = -20\cos(20t) = a(t)$ ✔.

Cette relation $a = -\omega^2 x$ (avec $\omega = 20$) est la signature de l'oscillateur harmonique. On l'a obtenue ici par deux primitivations successives, en partant de l'accélération.

Cohérence physique : la position est maximale (5 cm) à l'instant initial, où la vitesse est nulle — c'est bien le point de rebroussement d'une oscillation ✔.

Réponse. $v(t) = -\sin(20t)$ m/s · $x(t) = 0{,}05\cos(20t)$ m · et $-400\,x(t) = -20\cos(20t) = a(t)$ ✔.

Rappel de cours. Deux primitivations, deux constantes : la vitesse initiale fixe la première, la position initiale la seconde.

Erreur fréquente. Multiplier par 20 au lieu de diviser en primitivant $\cos(20t)$: l'amplitude de la vitesse serait 400 fois trop grande.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : décollage d'un chariot automatisé

v est une primitive de a : $v(t) = 3t - \frac{0{,}6t^2}{2} + C_1 = 3t - 0{,}3t^2 + C_1$.

Départ à l'arrêt : $v(0) = 0$, donc $C_1 = 0$ et $v(t) = 3t - 0{,}3t^2$.

Accélération nulle : $3 - 0{,}6t = 0$, soit $t = 5$ s.

Vitesse à cet instant : $v(5) = 15 - 0{,}3 \times 25 = 15 - 7{,}5 = 7{,}5$ m/s.

Position : $x(t) = \frac{3t^2}{2} - \frac{0{,}3t^3}{3} + C_2 = 1{,}5t^2 - 0{,}1t^3 + C_2$, avec $x(0) = 0$ donc $C_2 = 0$.

$x(5) = 1{,}5 \times 25 - 0{,}1 \times 125 = 37{,}5 - 12{,}5 = 25$ m.

Dernière question : la vitesse est maximale là où sa dérivée — c'est-à-dire l'accélération

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— s'annule en changeant de signe.

Or $a(t) = 3 - 0{,}6t$ est positive sur $[0\,;5[$ et nulle en 5 : la vitesse croît sur tout l'intervalle et atteint son maximum à $t = 5$ s, soit 7,5 m/s ✔.

Au-delà de 5 s (hors du domaine étudié), l'accélération deviendrait négative et le chariot ralentirait.

Contrôle de cohérence : la vitesse moyenne vaut $\frac{25}{5} = 5$ m/s, bien comprise entre 0 et 7,5 m/s ✔.

Réponse. $v(t) = 3t - 0{,}3t^2$ · accélération nulle à $t = 5$ s, où $v = 7{,}5$ m/s · $x(t) = 1{,}5t^2 - 0{,}1t^3$ et $x(5) = 25$ m · la vitesse est bien maximale à $t = 5$ s.

Rappel de cours. La vitesse est maximale quand l'ACCÉLÉRATION s'annule : c'est l'étude du signe de a qui le dit, pas celle de v.

Erreur fréquente. Confondre « accélération nulle » et « vitesse nulle ». À $t = 5$ s, le chariot ne s'arrête pas : il cesse d'accélérer, à 7,5 m/s.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : Euler et influence du pas

Relation : $y_{n+1} = y_n + h \times (-2y_n) = y_n(1 - 2h)$.

Avec $h = 0{,}25$: le facteur est $1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

$y_1 = 10 \times 0{,}5 = 5$ (à $t = 0{,}25$), puis $y_2 = 5 \times 0{,}5 = 2{,}5$ (à $t = 0{,}5$).

Avec $h = 0{,}125$: le facteur est $1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

$y_1 = 7{,}5$; $y_2 = 5{,}625$; $y_3 = 4{,}218\,75$; $y_4 = 3{,}164$ environ (à $t = 0{,}5$).

Comparaison à la valeur exacte 3,679 : avec $h = 0{,}25$, l'erreur est de 1,179 (soit 32%) ; avec $h = 0{,}125$, elle tombe à 0,515 (soit 14%).

Diviser le pas par 2 a donc divisé l'erreur par un peu plus de 2 : c'est le comportement attendu de la méthode d'Euler, dont l'erreur est proportionnelle au pas.

Les deux estimations SOUS-estiment la valeur exacte, parce que la pente utilisée (celle du début de chaque pas) est trop « raide » pour une fonction décroissante qui s'aplatit.

Conclusion pratique : la méthode d'Euler est simple mais coûteuse en précision. Pour un résultat fiable, il faut beaucoup de pas — ce qui, en pratique, se confie à un programme.

Réponse. $h = 0{,}25$: $y(0{,}5) \approx 2{,}5$ · $h = 0{,}125$: $y(0{,}5) \approx 3{,}16$ · l'erreur passe de 32% à 14% : diviser le pas par 2 divise l'erreur par environ 2.

Rappel de cours. L'erreur de la méthode d'Euler est à peu près PROPORTIONNELLE au pas h : pas deux fois plus petit, erreur deux fois plus petite.

Erreur fréquente. Croire qu'Euler donne la valeur exacte quand le calcul « tombe juste ». C'est toujours une approximation, et toujours du même côté pour une fonction de courbure constante.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : du débit au volume

Le débit est la dérivée du volume : $V' = d$. Donc V est une primitive de d.

$V(t) = 40t + \frac{6t^2}{2} + C = 40t + 3t^2 + C$.

Cuve initialement vide : $V(0) = 0$, donc $C = 0$ et $V(t) = 40t + 3t^2$.

$V(10) = 400 + 300 = 700$ L.

Pour 300 L : on résout $3t^2 + 40t = 300$, soit $3t^2 + 40t - 300 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On divise par 3 : $t^2 + \frac{40}{3}t - 100 = 0$. Complétons le carré : $\left(t + \frac{20}{3}\right)^2 - \frac{400}{9} - 100 = 0$.

$\left(t + \frac{20}{3}\right)^2 = \frac{400 + 900}{9} = \frac{1\,300}{9}$, donc $t + \frac{20}{3} = \frac{\sqrt{1\,300}}{3} \approx 12{,}019$.

$t \approx 12{,}019 - 6{,}667 = 5{,}35$ minutes. La cuve atteint 300 L au bout d'environ 5 min 21 s.

Contrôle : $V(5{,}35) = 40 \times 5{,}35 + 3 \times 28{,}62 \approx 214 + 85{,}9 \approx 299{,}9$ L ✔.

Débit constant équivalent : il faudrait 700 L en 10 min, soit 70 L/min.

Cohérence : le débit réel passe de 40 à 100 L/min, dont la moyenne est bien 70 L/min ✔ (la moyenne d'une fonction affine est la moyenne de ses valeurs extrêmes).

Réponse. $V(t) = 40t + 3t^2$ · $V(10) = 700$ L · 300 L atteints vers $t \approx 5{,}35$ min · débit constant équivalent : 70 L/min.

Rappel de cours. Débit → volume par primitivation : $V(t) = \int$ « cumul du débit », et la condition initiale donne la constante.

Erreur fréquente. Multiplier le débit initial par la durée ($40 \times 10 = 400$ L) : le débit augmente, le volume réel est bien plus grand.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : signal en dents de scie

Sur la première phase, le courant est constant : $q(t) = 0{,}02t + C_1$, avec $q(0) = 0$ donc $C_1 = 0$.

$q(t) = 0{,}02t$ sur $[0\,;0{,}01]$, d'où $q(0{,}01) = 0{,}02 \times 0{,}01 = 2 \times 10^{-4}$ C, soit 0,2 mC.

Sur la seconde phase : $q(t) = -0{,}02t + C_2$. La charge est CONTINUE, donc elle vaut encore 2×10^{-4} C à $t = 0{,}01$.

$2 \times 10^{-4} = -0{,}02 \times 0{,}01 + C_2 = -2 \times 10^{-4} + C_2$, donc $C_2 = 4 \times 10^{-4}$.

$q(t) = -0{,}02t + 4 \times 10^{-4}$ sur $[0{,}01\,;0{,}02]$.

$q(0{,}02) = -4 \times 10^{-4} + 4 \times 10^{-4} = 0$ C.

Commentaire : le condensateur se retrouve DÉCHARGÉ au bout d'une période. C'est logique : il a reçu autant de charge qu'il en a rendu, le courant ayant la même valeur absolue pendant des durées égales.

Charge maximale : sur la première phase q croît, sur la seconde elle décroît. Le maximum est donc atteint à la charnière $t = 0{,}01$ s, avec 2×10^{-4} C, soit 0,2 mC.

Allure du signal : un courant CARRÉ produit une charge TRIANGULAIRE (montée puis descente linéaires). C'est le principe du générateur de dents de scie.

Contrôle de pente : sur la descente, $q' = -0{,}02$ A, soit l'opposé de la montée ✔ le triangle est bien symétrique.

Réponse. $q(t) = 0{,}02t$ puis $q(t) = -0{,}02t + 4 \times 10^{-4}$ · $q(0{,}01) = 0{,}2$ mC et $q(0{,}02) = 0$ · charge maximale 0,2 mC à $t = 0{,}01$ s : un courant carré donne une charge triangulaire.

Rappel de cours. Sur un signal défini par morceaux, on primitive morceau par morceau, et l'on raccorde par CONTINUITÉ de la grandeur cumulée.

Erreur fréquente. Repartir de $C_2 = 0$ sur la seconde phase : la charge sauterait brutalement de 0,2 mC à −0,2 mC, ce qui est physiquement impossible.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : Euler programmé

$T'(0) = -0{,}05 \times (200 - 20) = -0{,}05 \times 180 = -9$ °C/min : la pièce perd 9 degrés par minute au début.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Euler : $T_{n+1} = T_n + h \times (-0{,}05(T_n - 20)) = T_n - 0{,}1(T_n - 20)$ pour $h = 2$.

$T_1 = 200 - 0{,}1 \times 180 = 200 - 18 = 182$ °C (à $t = 2$ min).

$T_2 = 182 - 0{,}1 \times 162 = 182 - 16{,}2 = 165{,}8$ °C (à $t = 4$ min).

$T_3 = 165{,}8 - 0{,}1 \times 145{,}8 = 165{,}8 - 14{,}58 = 151{,}22$ °C (à $t = 6$ min).

On observe que la perte par pas diminue (18, puis 16,2, puis 14,58) : le refroidissement ralentit à mesure que la pièce s'approche de l'air ambiant.

Programme :

```
def euler(n):
    T = 200
    h = 2
    for k in range(n):
        T = T - 0.05 * (T - 20) * h
    return T
```

Avec `euler(3)`, le programme renvoie 151,22 ✔ conforme au calcul à la main.

Température limite : le refroidissement s'arrête quand $T' = 0$, c'est-à-dire quand $T = 20$ °C — la température ambiante.

La pièce tend donc vers 20 °C sans jamais l'atteindre exactement : `euler(30)` (soit une heure) donne environ 27,6 °C, et `euler(60)` environ 20,3 °C.

Réponse. $T'(0) = -9$ °C/min · Euler : 182 ; 165,8 ; 151,22 °C · boucle `T = T - 0.05*(T-20)*h` · la pièce tend vers 20 °C (l'ambiante).

Rappel de cours. Dans une loi de refroidissement, $T' = -k(T - T_{\text{amb}})$: la vitesse de refroidissement est proportionnelle à l'ÉCART avec l'ambiante.

Erreur fréquente. Écrire $T' = -0{,}05\,T$ en oubliant le -20 : la pièce descendrait vers 0 °C, ce qu'aucun refroidissement à l'air libre ne fait.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).