Primitives — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Chercher une primitive, c'est remonter le temps de la dérivation : on connaît la VITESSE et l'on veut la position, on connaît l'INTENSITÉ et l'on veut la charge, on connaît le DÉBIT et l'on veut le volume. La réponse n'est jamais unique — deux primitives diffèrent d'une constante — et c'est la condition initiale (position de départ, charge initiale) qui fixe cette constante. Quand la dérivée dépend de la grandeur elle-même, comme dans un circuit RC, il n'y a plus de primitive à écrire : on approche la solution pas à pas par la MÉTHODE D'EULER. Ces 20 exercices corrigés couvrent les primitives des polynômes et des signaux sinusoïdaux, les conditions initiales et Euler, du calcul direct au problème type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/primitives

Exercice 1 – Vérifier qu'une fonction est une primitive

On considère $f(x) = 6x^2 - 4x + 5$ et $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 7$.

1. Vérifie que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. $G(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 100$ est-elle aussi une primitive de f ?

Exercice 2 – Primitives d'un polynôme

Détermine une primitive de $f(x) = 4x^3 + 6x - 2$, puis de $g(x) = 5$ et de $h(x) = x^2 - x$.

1. Donne une primitive de chacune de ces trois fonctions.

Exercice 3 – Primitives de cosinus et sinus

Détermine une primitive de $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ et $h(x) = 3\cos x - 2\sin x$.

1. Donne une primitive de chacune de ces fonctions.

Exercice 4 – Toutes les primitives

Soit $f(x) = 2x + 3$.

1. Donne l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2. Combien de primitives f admet-elle ?

Exercice 5 – Primitive avec une condition

Soit $f(x) = 3x^2 - 4x$. On cherche la primitive F de f telle que $F(2) = 5$.

1. Donne la forme générale des primitives de f.

2. Détermine celle qui vérifie la condition.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Primitives d'un signal sinusoïdal

Détermine une primitive de $f(t) = \cos(4t)$, puis de $g(t) = 5\sin(2t)$ et de $h(t) = 3\cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1. Donne une primitive de chacune.

Exercice 7 – Primitive d'une puissance composée

Détermine une primitive de $f(x) = (2x + 1)^2$ et de $g(x) = (3 - x)^3$.

1. Donne une primitive de chacune, en développant si nécessaire.

Exercice 8 – De la vitesse à la position

Un mobile a pour vitesse $v(t) = 6t + 2$ mètres par seconde. À l'instant $t = 0$, il se trouve à la position $x = 5$ m.

1. Détermine la position $x(t)$.

2. Où se trouve le mobile à $t = 4$ s ?

Exercice 9 – De l'intensité à la charge

Un condensateur initialement déchargé est traversé par un courant constant $i = 0{,}003$ A. On rappelle que $i(t) = q'(t)$, où q est la charge en coulombs.

1. Détermine $q(t)$.

2. Au bout de combien de temps la charge atteint-elle 0,012 C ?

3. Même question si le courant vaut $i(t) = 0{,}003 + 0{,}0004t$.

Exercice 10 – Linéarité des primitives

Détermine une primitive de $f(t) = 2t^2 - 3\cos(5t) + 4$.

1. Donne une primitive F de f.

2. Détermine celle qui vérifie $F(0) = 1$.

Exercice 11 – Mouvement à accélération constante

Un chariot part du repos à la position $x = 0$ et subit une accélération constante $a = 2{,}4$ m/s².

1. Détermine la vitesse $v(t)$.

2. Détermine la position $x(t)$.

3. Quelle distance a-t-il parcourue au bout de 5 s, et quelle est alors sa vitesse ?

Exercice 12 – Du signal alternatif à sa primitive

Un condensateur initialement déchargé reçoit un courant $i(t) = 0{,}5\cos(100\pi t)$ ampères.

1. Détermine la charge $q(t)$.

2. Donne l'amplitude de la charge.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Compare l'amplitude de q à celle de i et commente.

Exercice 13 – Méthode d'Euler : premiers pas

On considère la fonction y vérifiant $y'(t) = 2t + 1$ et $y(0) = 3$. On applique la méthode d'Euler avec un pas $h = 0{,}5$.

1. Rappelle la relation d'Euler.

2. Calcule les valeurs approchées de y en $t = 0{,}5$, 1 et 1,5.

3. Compare à la solution exacte.

Exercice 14 – Euler pour un circuit RC

La tension aux bornes d'un condensateur en charge vérifie $u'(t) = \dfrac{E - u(t)}{RC}$, avec $E = 12$ V et $RC = 0{,}02$ s. Initialement $u(0) = 0$. On prend un pas $h = 0{,}005$ s.

1. Calcule $u'(0)$.

2. Calcule les valeurs approchées de u aux instants 0,005 ; 0,01 ; 0,015 et 0,02 s.

3. Que vaut la tension finale prévue par le modèle ?

Exercice 15 – De l'accélération à la vitesse d'un oscillateur

Un point mobile subit l'accélération $a(t) = -20\cos(20t)$ m/s². À l'instant $t = 0$, sa vitesse est nulle et sa position vaut 0,05 m.

1. Détermine la vitesse $v(t)$.

2. Détermine la position $x(t)$.

3. Vérifie que $a(t) = -400\,x(t)$.

Exercice 16 – Type bac : décollage d'un chariot automatisé

Un chariot démarre à l'arrêt (position 0) avec une accélération $a(t) = 3 - 0{,}6t$ m/s², pour $0 \leq t \leq 5$ s.

1. Détermine la vitesse $v(t)$.

2. À quel instant l'accélération devient-elle nulle, et quelle est alors la vitesse ?

3. Détermine la position $x(t)$ et la distance parcourue en 5 s.

4. La vitesse est-elle maximale à $t = 5$ s ?

Exercice 17 – Type bac : Euler et influence du pas

On étudie $y' = -2y$ avec $y(0) = 10$. On compare deux applications de la méthode d'Euler, avec $h = 0{,}25$ puis $h = 0{,}125$, pour estimer $y(0{,}5)$.

1. Applique Euler avec $h = 0{,}25$ (deux pas).

2. Applique Euler avec $h = 0{,}125$ (quatre pas).

3. La valeur exacte est $y(0{,}5) \approx 3{,}679$. Compare les deux estimations.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : du débit au volume

Une cuve initialement vide est remplie avec un débit $d(t) = 40 + 6t$ litres par minute, t en minutes, pendant 10 minutes.

1. Détermine le volume $V(t)$ contenu dans la cuve.

2. Calcule le volume au bout de 10 minutes.

3. Au bout de combien de temps la cuve contient-elle 300 L ?

4. Quel débit constant aurait donné le même volume final ?

Exercice 19 – Type bac : signal en dents de scie

Un courant vaut $i(t) = 0{,}02$ A pour $0 \leq t \leq 0{,}01$ s, puis $i(t) = -0{,}02$ A pour $0{,}01 \leq t \leq 0{,}02$ s. Le condensateur est déchargé à $t = 0$.

1. Détermine $q(t)$ sur $[0\,;0{,}01]$ et calcule $q(0{,}01)$.

2. Détermine $q(t)$ sur $[0{,}01\,;0{,}02]$.

3. Calcule $q(0{,}02)$ et commente.

4. Quelle est la charge maximale atteinte ?

Exercice 20 – Type bac : Euler programmé

On modélise le refroidissement d'une pièce par $T'(t) = -0{,}05(T(t) - 20)$, avec $T(0) = 200$ °C (températures en °C, temps en minutes).

1. Calcule $T'(0)$ et interprète.

2. Applique la méthode d'Euler avec $h = 2$ minutes pour estimer $T(2)$, $T(4)$ et $T(6)$.

3. Écris un programme Python calculant T après n pas.

4. Vers quelle température la pièce tend-elle ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).