Probabilités conditionnelles et indépendance — Première STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Conditionner, c'est réduire l'univers : « sachant que la pièce vient de la ligne 2 », on ne regarde plus que les pièces de cette ligne. Tout le chapitre tient dans une formule, $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, et dans un outil, l'ARBRE PONDÉRÉ, qui la met en images : on multiplie le long d'une branche, on additionne les branches qui conduisent au même résultat. En STI2D, ces calculs servent au contrôle qualité, au diagnostic de panne et à la fiabilité d'un système à plusieurs composants. Ces 20 exercices corrigés couvrent l'arbre, la formule des probabilités totales, la probabilité inverse et l'indépendance — en insistant sur la différence entre « indépendant » et « incompatible », et entre $P_D(T)$ et $P_T(D)$. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/premiere-sti2d/probabilites-conditionnelles-independance

Exercice 1 – Probabilités lues dans un tableau

Un lot de 400 pièces est réparti ainsi :

ligne 1 : 228 conformes et 12 défectueuses, soit 240 pièces · ligne 2 : 144 conformes et 16 défectueuses, soit 160 pièces · totaux : 372 conformes, 28 défectueuses, 400 pièces

On prélève une pièce au hasard. On note L : « la pièce vient de la ligne 1 » et D : « la pièce est défectueuse ».

1. Calcule $P(L)$, $P(D)$ et $P(L \cap D)$.

2. Calcule $P(L \cup D)$.

Exercice 2 – Première probabilité conditionnelle

On reprend le lot de 400 pièces de l'exercice précédent : $P(L) = 0{,}6$, $P(D) = 0{,}07$ et $P(L \cap D) = 0{,}03$.

1. Calcule $P_L(D)$ et interprète.

2. Calcule $P_D(L)$ et interprète.

Exercice 3 – Lire un arbre pondéré

Un atelier reçoit ses composants de deux fournisseurs. 70% viennent de F_1 et le reste de F_2. Parmi ceux de F_1, 4% sont hors tolérance ; parmi ceux de F_2, 9% le sont.

1. Traduis l'énoncé en probabilités : $P(F_1)$, $P_{F_1}(H)$, $P_{F_2}(H)$ où H est « hors tolérance ».

2. Calcule $P(F_1 \cap H)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Compléter un arbre

Sur un arbre pondéré à deux niveaux, on connaît $P(A) = 0{,}35$, $P_A(B) = 0{,}8$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}25$.

1. Donne $P(\overline{A})$, $P_A(\overline{B})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

2. Calcule les probabilités des quatre chemins de l'arbre et vérifie leur somme.

Exercice 5 – Probabilité d'une intersection

Dans un atelier, 15% des machines sont anciennes. Une machine ancienne tombe en panne dans le mois avec une probabilité de 0,2 ; une machine récente, avec une probabilité de 0,05.

1. Calcule la probabilité qu'une machine prise au hasard soit ancienne ET tombe en panne.

2. Calcule la probabilité qu'elle soit récente ET tombe en panne.

Exercice 6 – Formule des probabilités totales

On reprend les deux fournisseurs : $P(F_1) = 0{,}7$, $P_{F_1}(H) = 0{,}04$, $P_{F_2}(H) = 0{,}09$, où H est « hors tolérance ».

1. Calcule la probabilité qu'un composant pris au hasard soit hors tolérance.

2. Sur une réception de 2 000 composants, combien de pièces hors tolérance peut-on prévoir ?

Exercice 7 – Tester l'indépendance

On reprend le lot de 400 pièces : $P(L) = 0{,}6$ (ligne 1), $P(D) = 0{,}07$ (défectueuse) et $P(L \cap D) = 0{,}03$.

1. Les évènements L et D sont-ils indépendants ?

2. Quelle conclusion industrielle en tirer ?

Exercice 8 – Remonter une branche de l'arbre

Toujours avec les deux fournisseurs : $P(F_1) = 0{,}7$, $P_{F_1}(H) = 0{,}04$, $P_{F_2}(H) = 0{,}09$ et $P(H) = 0{,}055$.

1. Un composant est hors tolérance. Quelle est la probabilité qu'il vienne de F_2 ?

2. Compare cette probabilité à $P(F_2)$ et commente.

Exercice 9 – Deux ateliers, un même contrôle

Un atelier produit 60% des pièces avec la machine M1 et 40% avec M2. M1 produit 2% de rebuts, M2 en produit 5%.

1. Calcule la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit un rebut.

2. Calcule la probabilité qu'une pièce soit conforme et issue de M2.

3. Sachant qu'une pièce est un rebut, quelle est la probabilité qu'elle vienne de M1 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Conditionnelle de l'évènement contraire

Un système de sécurité déclenche une alarme. Lors d'une intrusion réelle, il sonne avec une probabilité 0,96. En l'absence d'intrusion, il sonne quand même avec une probabilité 0,03. La probabilité d'une intrusion une nuit donnée est 0,002.

1. Calcule $P_I(\overline{S})$ et $P_{\overline{I}}(\overline{S})$, où I est l'intrusion et S le déclenchement.

2. Interprète chacune de ces deux probabilités.

Exercice 11 – Alarme : la probabilité qui compte

Reprenons le système de sécurité : $P(I) = 0{,}002$, $P_I(S) = 0{,}96$, $P_{\overline{I}}(S) = 0{,}03$.

1. Calcule la probabilité que l'alarme sonne une nuit donnée.

2. L'alarme a sonné. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement eu intrusion ?

3. Commente ce résultat.

Exercice 12 – Arbre à trois branches

Un assembleur reçoit ses cartes de trois fournisseurs : 50% de A, 30% de B, 20% de C. Les taux de cartes défectueuses sont respectivement 1%, 3% et 6%.

1. Calcule la probabilité qu'une carte prise au hasard soit défectueuse.

2. Quelle est la probabilité qu'une carte défectueuse vienne de C ?

3. Quel fournisseur est responsable de la plus grande part des défauts ?

Exercice 13 – Indépendants ou incompatibles ?

On lance un dé équilibré à six faces. On note A : « le résultat est pair », B : « le résultat est un multiple de 3 » et C : « le résultat est 1 ».

1. A et B sont-ils indépendants ? incompatibles ?

2. A et C sont-ils indépendants ? incompatibles ?

3. Que conclure sur ces deux notions ?

Exercice 14 – Construire un tableau depuis des pourcentages

Dans une promotion de 500 élèves, 40% sont en STI2D. Parmi les élèves de STI2D, 35% ont choisi l'option ingénierie numérique ; parmi les autres élèves, 10% l'ont choisie.

1. Construis le tableau des effectifs.

2. Calcule la probabilité qu'un élève pris au hasard ait choisi cette option.

3. Sachant qu'un élève a choisi l'option, quelle est la probabilité qu'il soit en STI2D ?

Exercice 15 – Indépendance à partir d'une réunion

Sur une ligne de production, on note A : « la pièce présente un défaut d'aspect » et B : « la pièce présente un défaut de cote ». On sait que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$.

1. Calcule $P(A \cap B)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

3. Calcule $P_A(B)$ et interprète.

Exercice 16 – Type bac : fiabilité d'un système

Un dispositif de sécurité comporte deux capteurs indépendants. Le capteur 1 fonctionne correctement avec une probabilité 0,98, le capteur 2 avec une probabilité 0,95.

1. Le dispositif est monté EN SÉRIE : il fonctionne si les deux capteurs fonctionnent. Calcule sa fiabilité.

2. Il est monté EN PARALLÈLE (redondance) : il fonctionne dès qu'au moins un capteur fonctionne. Calcule sa fiabilité.

3. Compare et conclus.

Exercice 17 – Type bac : test de contrôle qualité

Dans une production, 4% des pièces sont défectueuses. Un test automatique déclare « défectueuse » 95% des pièces réellement défectueuses, et 2% des pièces conformes.

1. Construis l'arbre et calcule la probabilité qu'une pièce soit déclarée défectueuse.

2. Une pièce est déclarée défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle le soit réellement ?

3. Une pièce est déclarée conforme. Quelle est la probabilité qu'elle soit en réalité défectueuse ?

4. Le test est-il satisfaisant ?

Exercice 18 – Type bac : arbre avec un paramètre inconnu

Deux usines fabriquent le même connecteur. L'usine A en produit une proportion p, l'usine B le reste. Le taux de défaut est de 2% chez A et de 5% chez B. Le contrôle global relève 3% de connecteurs défectueux.

1. Exprime la probabilité qu'un connecteur soit défectueux en fonction de p.

2. Détermine p.

3. Sachant qu'un connecteur est défectueux, quelle est la probabilité qu'il vienne de B ?

Exercice 19 – Type bac : indépendance dans un tableau

Une enquête sur 1 000 équipements croise la marque et la présence d'une panne dans l'année :

marque X : 48 équipements en panne et 352 sans panne, soit 400 · marque Y : 72 en panne et 528 sans panne, soit 600 · totaux : 120 en panne, 880 sans panne, 1 000 équipements

1. Calcule $P(X)$, $P(\text{panne})$ et $P(X \cap \text{panne})$.

2. Les évènements « être de marque X » et « tomber en panne » sont-ils indépendants ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Calcule les taux de panne de chaque marque et confirme la conclusion.

Exercice 20 – Type bac : diagnostic de panne en deux étapes

Un équipement en panne a deux causes possibles, exclusives : une défaillance électrique (probabilité 0,65) ou une défaillance mécanique (probabilité 0,35). Un premier diagnostic rapide conclut « électrique » dans 80% des pannes électriques réelles et dans 30% des pannes mécaniques.

1. Calcule la probabilité que le diagnostic conclue « électrique ».

2. Le diagnostic conclut « électrique » : quelle est la probabilité que la panne le soit réellement ?

3. Le diagnostic conclut « mécanique » : quelle est la probabilité que la panne soit réellement mécanique ?

4. Dans quel cas le diagnostic est-il le plus fiable ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).